

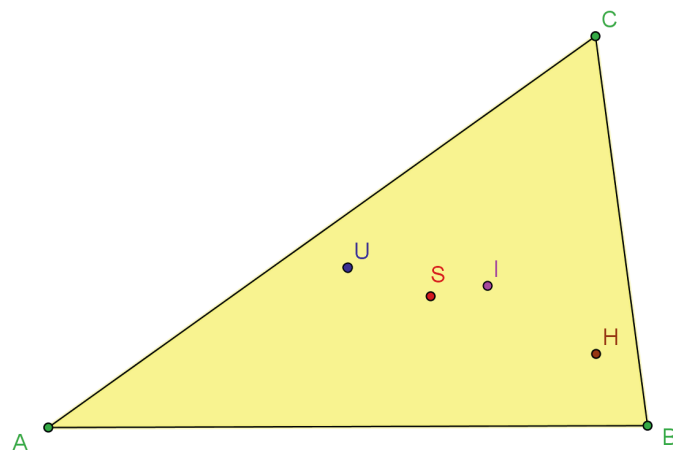


## 5.3 Besondere Punkte im Dreieck

Jahrgangsstufe 6 – 8

Das Thema „Besondere Punkte und Linien im Dreieck“ zählt immer noch, auch und gerade beim Einsatz von DGS, zu den traditionellen Themen des Geometrie-Unterrichts.

In dieser Aufgabe werden die vier typischen Punkte gemeinsam betrachtet und deren Zusammenhänge untersucht. Dabei können im Zugmodus Erkenntnisse entdeckt werden, die im Unterricht statisch mit Papier und Stift nicht erfasst werden können.



Diese Aufgabe eignet sich, vom leeren Bildschirm aus zu starten und die Schülerinnen und Schüler die besonderen Punkte im Dreieck selber konstruieren zu lassen. Je nach verfügbarer Zeit und Erfahrung im Umgang mit DGS kann man aber auch mit einem vorbereiteten Arbeitsblatt starten.

Die Aufgabe ist besonders geeignet, Zusammenhänge zwischen der Gestalt des Dreiecks ABC und der Lage der besonderen Punkte zu entdecken.



Abbildung 5.3b: Leonhard Euler auf dem ehemaligen schweizerischen 10-Franken-Schein

### VORLIEGENDE DATEIEN

5-3\_euler.ggb

↓ [www.geogebra.org/m/En65Zzuh](http://www.geogebra.org/m/En65Zzuh)

5-3\_euler.tns

↓ [www.mnu.de/weko/5-3\\_euler.tns](http://www.mnu.de/weko/5-3_euler.tns)

### Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:

Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,  
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,  
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

### Aufgabe: Besondere Punkte im Dreieck konstruieren

- Zeichne ein Dreieck ABC.
- Konstruiere den Umkreismittelpunkt U und kontrolliere dein Ergebnis.  
*Hinweis zur Durchführungskontrolle: Du hast kontrolliert, dass der Umkreismittelpunkt auch wirklich den Namen „U“ und nicht „D“ hat.*
- Du hast überprüft, ob der Umkreismittelpunkt tatsächlich von allen Eckpunkten des Dreiecks den gleichen Abstand hat. Damit Eure Zeichnung nicht zu unübersichtlich wird, verbergt alle Hilfslinien. Ihr sollt nur noch Euer Dreieck und den Punkt U anzeigen lassen.
- Zeichne nun den Inkreismittelpunkt I, den Schwerpunkt S und den Höhenschnittpunkt H mit in das Dreieck ein und färbe die Punkte unterschiedlich.
- Notiere jeweils, wie die Punkte konstruiert wurden.

Speichere deine Konstruktion unter dem Namen „euler“.

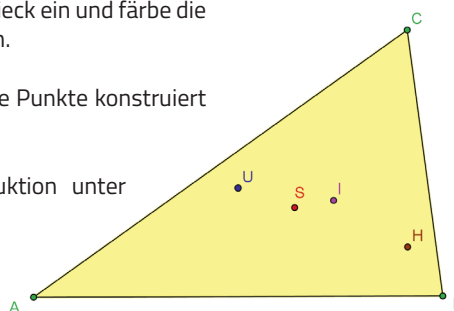


Abbildung 5.3a

### Aufgabe: Besondere Punkte im Dreieck untersuchen

Arbeite mit der Datei 5-3\_euler.

- Verändere Dreieck ABC durch Ziehen an den Eckpunkten. Was stellst du für die Lage von I, U, H, S fest?
- Welche Sonderfälle kannst du beobachten? Notiere deine Ergebnisse. Was stellst du speziell für die Lage von S fest? Miss die Abstände zu U und zu H. In welchem Sonderfall hast du dies schon früher bewiesen?

**Hinweis:** Der Zusammenhang ist als Euler-Gerade bekannt. Benannt ist sie nach dem Mathematiker Leonhard Euler (\* 15. April 1707 in Basel; † 7. September in Sankt Petersburg). Er war ein Schweizer Mathematiker und Physiker und er gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker.



## Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer

Besondere Punkte im Dreieck

### VORKENNTNISSE

Die Schülerinnen und Schüler sollten über folgende Kenntnisse verfügen:

- Sie verwenden die Begriffe *Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Höhen, Seitenhalbierende, Umkreis, Inkreis, Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt*.
- Sie kennen besondere Dreiecke (*gleichschenkelig, gleichseitig, rechtwinklig*) und den Satz über den Schwerpunkt.

### LITERATUR

Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. (2011): Geometrie entdecken!, Teil 2. co.Tec Verlag

Heintz, G. & Elschenbroich, H.-J. (2014): Geometrie kompakt, Modul B. Fortbildungsreihe DZLM & Medienberatung NRW.

.....  
*Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:*  
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,  
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,  
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

## Hinweise zur Lösung

Im ersten Aufgabenteil werden die besonderen Punkte konstruiert und die Korrektheit der Konstruktion im Zugmodus überprüft.

Im zweiten Aufgabenteil werden dann Zugmodus spezielle Dreiecksformen gefunden und dabei besondere Konstellationen der vier Punkte entdeckt:

- Bei gleichseitigen Dreiecken fallen alle vier Punkte zusammen.
- Bei gleichschenkligen Dreiecken liegen alle vier Punkte auf einer Geraden durch U und H.
- Bei rechtwinkligen Dreiecken liegt U auf der Hypotenuse und H im Eckpunkt des rechten Winkels und S teilt UH im Verhältnis 2:1
- Dieses Teilverhältnis 2:1 bleibt auch bei beliebigen Dreiecken erhalten.

### Mögliche Alternativen zur Aufgabenstellung:

Je nach Zeit und Erfahrung kann mit der Konstruktion vom leeren Bildschirm aus begonnen werden oder gleich mit dem zweiten Teil und einer vorbereiteten Konstruktion.

### MEHRWERT

Das digitale Werkzeug erweitert die Problemlösekompetenz durch

- systematisches Variieren,
- Anwenden der Problemlösestrategie „Spezialfälle finden“.

Das digitale Werkzeug erweitert die Argumentationskompetenz durch

- Erläuterung mathematischer Sachverhalte in eigenen Worten.

### WERKZEUGKOMPETENZEN

#### Bedienkompetenz:

- Konstruieren mit den Konstruktionswerkzeugen für Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Senkrechte, Mittelpunkte, Schnittpunkte
- Punkt ziehen im Zugmodus
- Abstände messen
- präzises Ausrichten von Punkten.

#### Dokumentationskompetenz:

Die Schülerinnen und Schüler notieren auf der inhaltlichen Ebene:

- Der Umkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten. Der Inkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden. Der Höhenschnittpunkt ist der Schnittpunkt der Höhen.
- Bei speziellen Dreiecken liegen die Punkte in besonderen Konstellationen:
  - a) Bei gleichseitigen Dreiecken fallen alle vier Punkte zusammen.
  - b) Bei gleichschenkligen Dreiecken liegen alle vier Punkte auf einer Geraden durch U und H.
  - c) Bei rechtwinkligen Dreiecken liegt U auf der Hypotenuse und H im Eckpunkt des rechten Winkels und S teilt UH im Verhältnis 2:1
- Das Teilverhältnis  $HS:SU = 2:1$  bleibt auch bei beliebigen Dreiecken erhalten.