

Ma 16/16 Rü_Online-Ergänzung



Urnenmodell zum radioaktiven Zerfall

//////
TASSO MARKL
//////

Online-Ergänzung

5 Weiterführende Überlegungen

Da die Unterrichtszeit begrenzt ist, kommen die nachfolgend skizzierten Überlegungen allenfalls für Arbeitsgemeinschaften in Betracht, die dann ihre Ergebnisse u. U. als Referate in den allgemeinen Unterricht einbringen können.

In der Natur hat man es meist mit Zerfallsreihen zu tun: Ein Nuklid wird beim Zerfall erst über mehrere Zwischenstufen stabil. Die vier bekannten Reihen sind natürlich für eine Behandlung in diesem Rahmen zu komplex. Darstellbar ist aber ein hypothetischer zweistufiger Zerfall – Das Nuklid A_k hat noch k Zerfälle mit den Zerfallskonstanten λ_1 und λ_2 vor sich, A_0 ist stabil (Abb. 6).

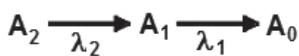


Abb. 6.
Zweistufiger Zerfall

Die Startmatrix c ist mit Ziffern »2« besetzt – die Urne mit schwarzen Kugeln gefüllt, wird über die Zufallszahlen »2« getroffen – eine schwarze Kugel gezogen, so wird diese Ziffer durch »1« ersetzt – eine graue Kugel eingelegt, wird »1« getroffen – eine graue Kugel gezogen, durch »0« – durch eine weiße ersetzt, die Darstellung eines stabilen Atoms.

Anpassung an die Realität über die Größe des durch einen Zug repräsentierten Zeitintervalls führt jedoch zu gleichen Zerfallskonstanten: $\lambda_2 = \lambda_1$ – das reale Urnenmodell bietet kaum eine andere einfache Möglichkeit –, während hier gerade: $\lambda_2 < \lambda_1$ interessant und in der Simulation am Rechner tatsächlich auch darstellbar ist. Ziel ist die Verminderung der Zerfallskonstante λ_2 auf

$$\lambda_2 = \lambda_1 \cdot \frac{1}{\nu},$$

So o. k. ??? wobei der Streckungsfaktor ν geeignet zu wählen ist. Ein Programm für den Tl-Nspire ist in Abbildung 7 dargestellt.

Die Verminderung der Zerfallskonstanten λ_2 für den ersten Zerfall: $A_2 \dashrightarrow A_1$ wird durch Benutzung einer weiteren Zufallszahl m erreicht, die zwischen 0 und ν liegt. Wird mit den ersten beiden Zufallszahlen: k, l in der Bestandsmatrix »1« getroffen, so wird der Zug in jedem Fall gezählt: Ersatz der »1« durch »0«, Anpassung der Listen: »tochterbestliste« und »zerfallliste«, wird dagegen »2« ge-

troffen, so wird der Zug übergangen, wenn: $m \geq 1$. Ist jedoch $m \leq 1$, wird der Zuge gewertet: Ersatz der »2« durch »1«, Anpassung der Listen: »mutterbestliste«, »tochterbestliste« und »zerfallliste«.

Abbildung 8 zeigt die Ergebnisse einer Simulation mit dem Aufruf $mt(20,2)$, was bedeutet, dass $\lambda_1 = 2 \cdot \lambda_2$ gilt. Dass der Bestand des Materials A_2 durch eine Exponentialfunktion darstellbar ist, ist zu vermuten.

Der Verlauf des Bestandes an A_1 ist qualitativ verstehbar. A_1 entsteht durch Zerfall aus A_2 , der Bestand wächst also zunächst an. Wenn allerdings eine gewisse Größe erreicht ist, kommt der zweite Zerfall zur Wirkung, zudem vermindert sich – wegen des abnehmenden Bestands an A_2 der »Nachschub«, der Bestand an A_1 wächst also nicht weiter, im weiteren Verlauf vermindert er sich wieder. Wegen der Wahl: $\lambda_1 = 2 \cdot \lambda_2$, übertrifft er kaum je

```

Define mt(groesse,faktor)=
Prgm
:Local schritte,bestand1,bestand2,i,j,k,l,m,zerfaelle
:schritte:=5*groesse*groesse
:=newMat(groesse,groesse)
:zeitliste:=newList(schritte)
:bestandliste1:=newList(schritte)
:bestandliste2:=newList(schritte)
:zerfallliste:=newList(schritte)
:bestand1:=groesse*groesse
:bestand2:=0
:zerfaelle:=0
:For i,1,groesse
:For j,1,groesse
:s[i,j]:=2
:EndFor
:EndFor
:For n,1,schritte
:k:=randInt(1,groesse)
:l:=randInt(1,groesse)
:m:=faktor*rand()
:If s[k,l]=1 Then
:s[k,l]:=0
:bestand2:=bestand2-1
:zerfaelle:=zerfaelle+1
:EndIf
:If s[k,l]=2 and m<1 Then
:s[k,l]:=1
:bestand1:=bestand1-1
:bestand2:=bestand2+1
:zerfaelle:=zerfaelle+1
:EndIf
:zeitliste[n]:=n
:bestandliste1[n]:=bestand1
:bestandliste2[n]:=bestand2
:zerfallliste[n]:=zerfaelle
:EndFor
:EndPrgm

```

←---- Zusätzliche Zufallszahl m

←---- Übergehen des Zugs, wenn $m \geq 1$.

Abb. 7. Simulationsprogramm für den zweistufigen Zerfall

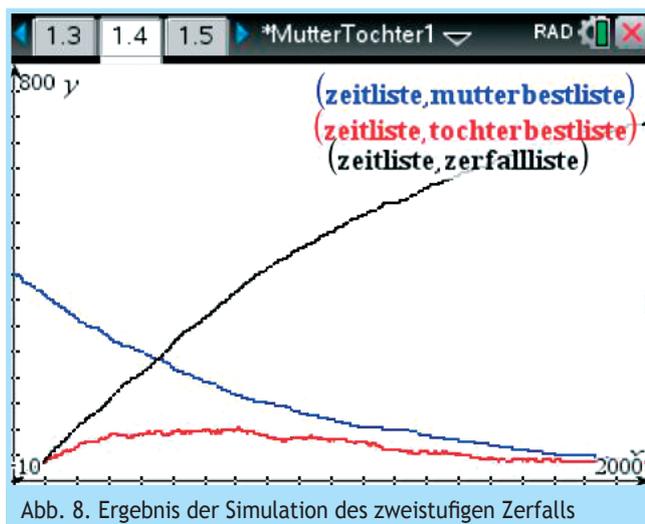


Abb. 8. Ergebnis der Simulation des zweistufigen Zerfalls

den Bestand an A_2 . Eine beschreibende Formel ist jedoch aus der Graphik nicht erkennbar. Sie lautet

$$N_1(t) = N_0 \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot (e^{-\lambda_2 \cdot t} - e^{-\lambda_1 \cdot t}),$$

dürfte aber für unterrichtliche Zwecke kaum in Betracht kommen, dabei ist N_1 der Bestand des Materials A_1 zur Zeit t , N_0 der Anfangsbestand des Materials A_2 .

Interessant ist die Auswertung der Liste der Zerfälle, um die Aktivität zu bestimmen (Abb. 8). Offensichtlich wird der stochastische Charakter des Vorgangs. Darüber hinaus gewinnt

man für die linke Hälfte der Darstellung den Eindruck, dass die Aktivität zunächst im Mittel ansteigt. Dies entspricht einer Beobachtung der Madame Curie: Frisch hergestellte Radium-Präparate waren weniger aktiv als einige Zeit gelagerte. Der Grund ist klar: Die in aller Regel weniger stabilen Folgeprodukte tragen zur Gesamtaktivität bei, müssen aber erst einmal durch Zerfall entstehen.



Abb. 9. Aktivität beim zweistufigen Zerfall

Dr. TASSO MARKL, tasso.markl@freenet.de, hat an verschiedenen Gymnasien in München die Fächer Mathematik, Physik, Informatik, Photographie und Erdkunde unterrichtet. Er ist tätig als Korrektor beim Bundeswettbewerb Mathematik und als Mentor bei »Jugend trainiert Mathematik«.