Ma 12/58 Rü_Online-Ergänzung

Geniale Ideen großer Mathematiker (9)

OMAR KHAYYAMs Methode zur Lösung kubischer Gleichungen

HEINZ KLAUS STRICK

Online-Ergänzung

MNU 68/6 (15.11.2015) Seiten 1–4, ISSN 0025-5866, © Verlag Klaus Seeberger, Neuss

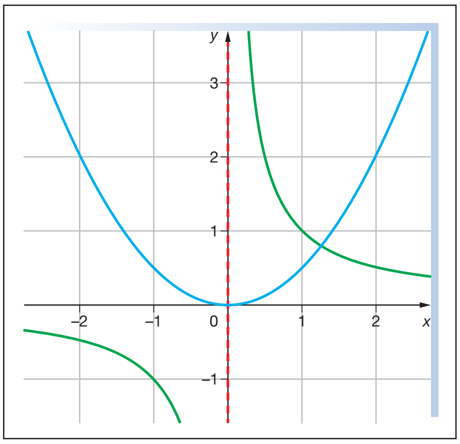
OMAR KHAYYAMs Lösungsverfahren für kubische Gleichungen

Der persische Mathematiker, Astronom, Philosoph und Dichter OMAR KHAYYAM (1048 – 1131) erkannte, dass sich das Lösen von kubischen Gleichungen auf die Schnittpunktbestimmung von geeigneten Kegelschnitten zurückführen lässt.

Algebraische Verfahren zur Lösung von Gleichungen 3. Grades wurden erst im 16. Jahrhundert durch SCIPIONE DEL FERRO, NICCOLO TARTAGLIA und LUDOVICO FERRARI entwickelt.

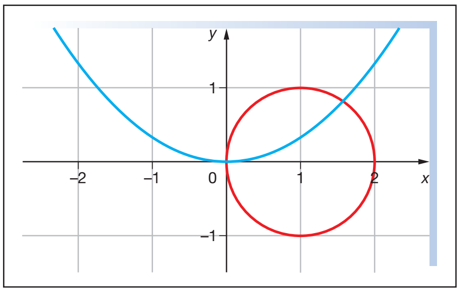
Beispiel 1: Die Lösung der Gleichung $x^3 = a$ ergibt sich als Schnitt einer gestauchten Parabel mit $y = \frac{1}{a} \cdot x^2$ und einer Normalhyperbel mit $y = \frac{1}{x}$.

Für die Zeichnung wurde $a = 2$ gewählt. Erläutern Sie.



Beispiel 2: Die Gleichung $x^3 + a^2x = a^2b$ löste OMAR KHAYYAM durch Schnitt des Kreises $x^2 + y^2 = bx$ mit der Parabel $x^2 = ay$. Für die Zeichnung wurden $a = 3$ und $b = 2$ gewählt.

Erläutern Sie.



 MNU 68/6 (15.11.2015), ISSN 0025-5866, © Verlag Klaus Seeberger, Neuss

Auf dem Arbeitsblatt wurden die Typen 1 und 2 der kubischen Gleichungen aus der Klassifikation von OMAR KHAYYAM (Tabelle 1) betrachtet. Weitere Typen können ergänzend zu dem Arbeitsblatt im Unterricht untersucht werden.

Typen kubischer Gleichungen	Lösung durch Schnitt von
(1) $x^3 = c$	Zwei Parabeln
(2) $x^3 + bx = c$	Kreis und Parabel
(3) $x^3 + c = bx$	Parabel und Hyperbel
(4) $x^3 = bx + c$	Parabel und Hyperbel
(5) $x^3 + ax^2 = c$	Parabel und Hyperbel
(6) $x^3 + c = ax^2$	Parabel und Hyperbel
(7) $x^3 = ax^2 + c$	Parabel und Hyperbel
(8) $x^3 + ax^2 + bx = c$	Kreis und Hyperbel
(9) $x^3 + ax^2 + c = bx$	Zwei Hyperbeln
(10) $x^3 + bx + c = ax^2$	Kreis und Hyperbel
(11) $x^3 = ax^2 + bx + c$	Zwei Hyperbeln
(12) $x^3 + ax^2 = bx + c$	Zwei Hyperbeln
(13) $x^3 + bx = ax^2 + c$	Kreis und Hyperbel
(14) $x^3 + c = ax^2 + bx$	Zwei Hyperbeln

Tab. 1. Typen kubischer Gleichungen und OMAR KHAYYAMs Auswahl geeigneter Kegelschnitte zur Lösung

- Lösung von (3) $x^3 + c = bx$ durch den Schnitt der Graphen von $y = -\frac{1}{x}$ und $y = \frac{1}{c} \cdot x^2 - \frac{b}{c}$.

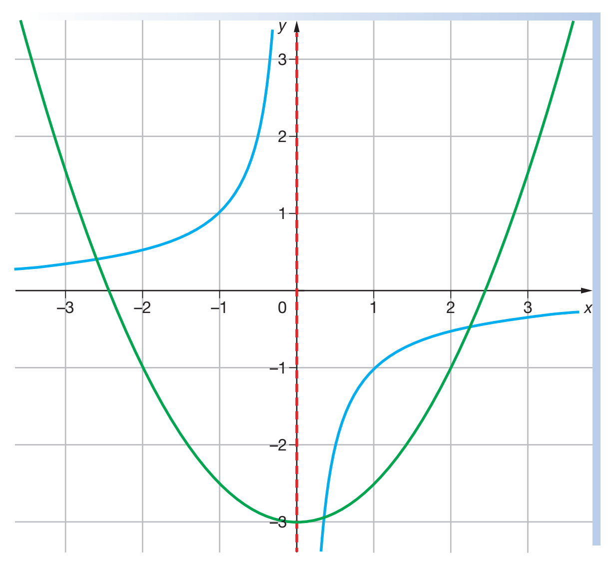


Abb. 4. Lösung der Gleichung $x^3 + 2 = 6x$

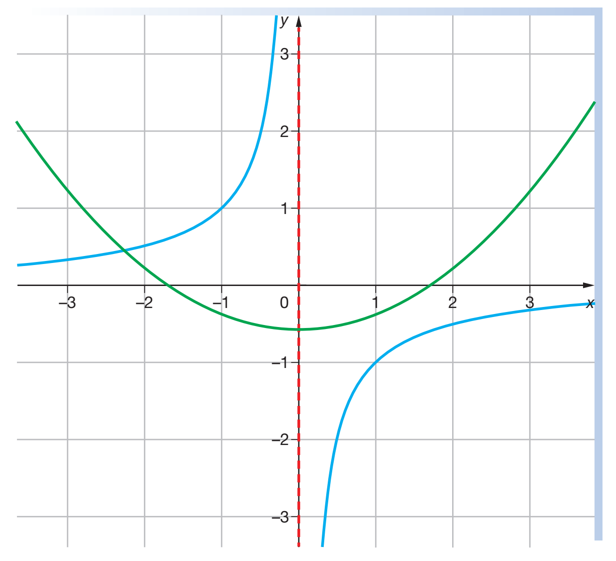


Abb. 5. Lösung der Gleichung $x^3 + 5 = 3x$

Aus den beiden Beispielen mit $b = 6$, $c = 2$ bzw. $b = 3$, $c = 5$ wird deutlich, wie die Anzahl der Lösungen von der Wahl der Koeffizienten abhängt.

- Lösung von (4) $x^3 = bx + c$ durch den Schnitt der Graphen von $y = \frac{1}{x}$ und $y = \frac{1}{c} \cdot x^2 - \frac{b}{c}$ – im Vergleich zu (3) mit gespiegeltem Graphen.
- Lösung von (5) $x^3 + ax^2 = c$ durch den Schnitt der Graphen von $y = \frac{1}{x}$ und $y = \frac{1}{c} \cdot \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4c}$.

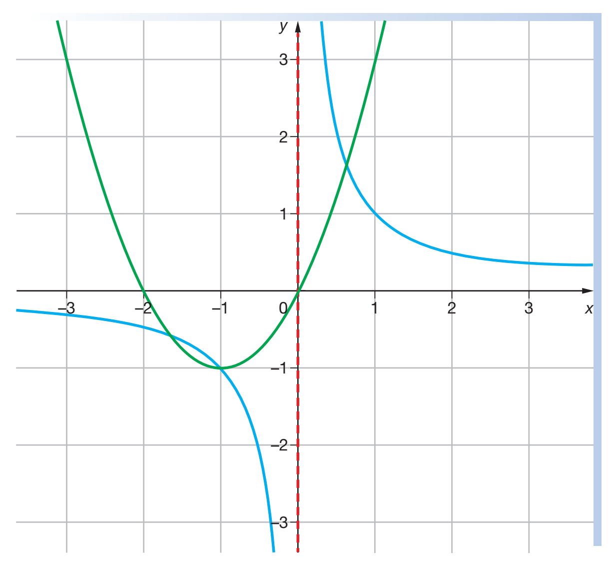


Abb. 6. Lösung der Gleichung $x^3 + 2x = 1$

- Lösung von (6) $x^3 + c = ax^2$ durch den Schnitt der Graphen von $y = -\frac{1}{x}$ und $y = \frac{1}{c} \cdot \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4c}$.
- Lösung von (7) $x^3 = ax^2 + c$ durch den Schnitt der Graphen von $y = \frac{1}{x}$ und $y = \frac{1}{c} \cdot \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4c}$.

Von Gleichungstyp (8) an versagen ähnliche Ansätze.

Wesentlich für die zuletzt betrachteten Lösungswege ist die Verwendung von Funktionsgleichungen für Parabeln und »Normal«-Hyperbeln *in einem Koordinatensystem* – Voraussetzungen, über die die Mathematiker erst ab dem 17. Jahrhundert verfügten.

Die von OMAR KHAYYAM durchgeführten Untersuchungen bezogen sich auf Kegelschnitte, deren Konstruktion durch griechische Mathematiker wie APOLLONIUS VON PERGE (262–190 v. Chr.) umfassend beschrieben und durch IBRAHIM IBN SINAN (908–946), dem berühmten Enkel THABIT IBN QURRAS (826–901), in die Wissenschaft der islamischen Welt eingeführt wurden (BERGGREN, 2011).

Für die Behandlung der Fälle (3) und (4) beispielsweise betrachtete OMAR KHAYYAM Parabeln und Hyperbeln mit zueinander orthogonalen Symmetrieachsen.

Gemeinsame Punkte der Parabel mit

$$y = -\frac{1}{w} \cdot x^2$$

und der durch den Ursprung verlaufenden Hyperbel mit

$$\frac{(x+u)^2}{u^2} - \frac{y^2}{v^2} = 1$$

müssen die Gleichung

$$\frac{(x+u)^2}{u^2} - \frac{x^4}{v^2w^2} = 1$$

erfüllen. Umformung ergibt für $x \neq 0$:

$$\frac{v^2w^2}{u^2} \cdot (x+u)^2 - x^4 = v^2w^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{v^2w^2}{u^2} \cdot x^2 + 2u \cdot \frac{v^2w^2}{u^2} \cdot x + v^2w^2 = x^4 + v^2w^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{v^2w^2}{u^2} \cdot x^2 + 2u \cdot \frac{v^2w^2}{u^2} \cdot x = x^4$$

$$\Leftrightarrow \frac{v^2w^2}{u^2} \cdot x + 2u \cdot \frac{v^2w^2}{u^2} = x^3,$$

also mit $b = \frac{v^2w^2}{u^2}$ und $c = 2u \cdot b$ eine Gleichung vom Typ (4).

Für $u = 3$ und $v = 2$ und $w = 2$, also $b = \frac{16}{9}$ und $c = \frac{32}{3}$ erhält man die in Abbildung 7 dargestellte Situation.

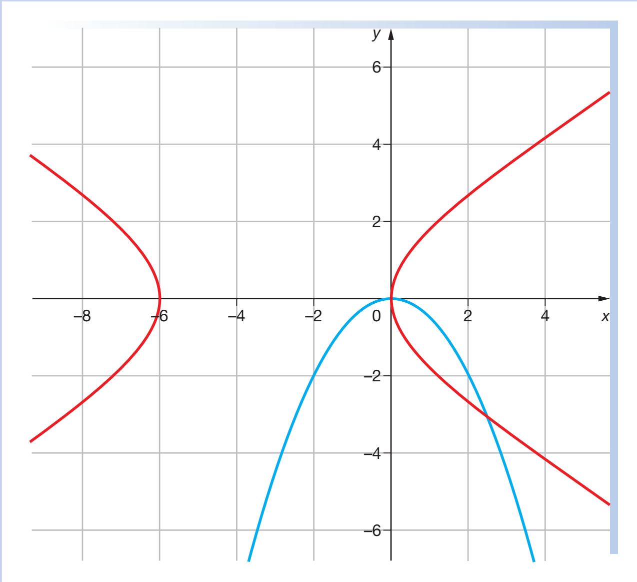


Abb. 7. Lösung der Gleichung $x^3 = \frac{16}{9}x + \frac{32}{3}$

Literatur

BERGGREN, L. (2011). *Mathematik im mittelalterlichen Islam.* Heidelberg: Springer.

OStD i. R. HEINZ KLAUS STRICK, Pastor-Scheibler-Str. 10, 51381 Leverkusen, strick.lev@t-online.de.

MNU 68/6 (15.11.2015), ISSN 0025-5866, © Verlag Klaus Seeberger, Neuss