Anwendungsbezogene Optimierungsaufgaben

– auch in der Sekundarstufe I

RICHARD GEISREITER

Online-Ergänzung

Satz 3: Allgemeine Mittelungleichung

Für n nichtnegative reelle Zahlen $x_1;\cdots;x_n (n \in \mathbb{N})$ ist

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n} \le \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

wobei die Gleichheit genau dann gilt, wenn $x_1 = \cdots = x_n$ ist.

Beweis nach AUGUST-LOUIS CAUCHY (1789-1857): Zunächst wird die Mittelungleichung mittels vollständiger Induktion für alle natürlichen Zahlen bewiesen, die sich als Zweierpotenz darstellen lassen. Dann werden alle natürlichen Zahlen betrachtet, die nicht die Form 2^k haben.

Induktionsanfang n = 2:

Die Aussage folgt unmittelbar, da die Ungleichung $\sqrt[2]{x_1 \cdot x_2} \le \frac{x_1 + x_2}{2}$ äquivalent ist zur Ungleichung $0 \le x_1 - 2 \cdot \sqrt{x_1 \cdot x_2} + x_2 = \left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2$, wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn $x_1 = x_2$ ist.

Für n = 2² erhält man mit dem eben Bewiesenen

$$\sqrt[4]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4} = \sqrt{\sqrt{x_1 \cdot x_2} \cdot \sqrt{x_3 \cdot x_4}} \le \frac{\sqrt{x_1 \cdot x_2} + \sqrt{x_3 \cdot x_4}}{2} \le \frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2}}{2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$$

,

also ist $\sqrt[4]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4} \le \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$,

und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ ist.

Induktionsannahme n = 2^k ($k \in \mathbb{N}$) :

$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n} \le \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$, wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ ist.

Induktionsschritt $n \to 2n$ (= 2^{k+1}):

Aus $\sqrt[2n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_{2n}} = \sqrt{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_{2n}}}$

folgt nun mit dem Induktionsanfang

$$\sqrt{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_{2n}}} \le \frac{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_{2n}}}{2} \quad (*)$$

und mit der Gültigkeit der Induktionsannahme

$$\frac{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_{2n}}}{2} \le \frac{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + x_2 + \cdots + x_{2n}}{n}}{2} \quad (**)$$

MNU Journal – Ausgabe 3.2016 – ISSN 0025-5866 – © Verlag Klaus Seeberger, Neuss

Nun ergibt sich mit (*) und (**)

$$\sqrt[2n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{2n}} \le \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2n}}{2n}.$$

Damit ist der Satz für alle $n = 2^m$ ($m \in \mathbb{N}$) bewiesen.

Jetzt gelte $2^k < n < 2^{k+1}$ ($k \ge 1$; $n \in \mathbb{N}$).

Für $k = 1$, also $n = 3$ wählt man zusätzlich noch $x_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$.

So erhält man aus dem Vorhergehenden

$$\sqrt[4]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4} \le \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}}{4} \le x_4.$$

Nach einer einfachen Umformung ergibt sich

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \le x_4{}^3$, d. h. $\sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} \le \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$,

wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn $x_1 = x_2 = x_3$ ist.

Im allgemeinen Fall fügt man zu den Zahlen $x_1, \dots, x_n$ noch die $2^{k+1} = n$ Zahlen

$$x_{n+1} = \dots = x_{2^{k+1}} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} =: a_M \qquad (***)$$

hinzu. Daraus folgt mit dem oben Bewiesenen

$$\sqrt[2^{k+1}]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \cdot x_{n+1} \cdot \dots \cdot x_{2^{k+1}}} \le \frac{x_1 + \dots + x_n + x_{n+1} + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}.$$

Mit (***) erhält man für die vorstehende Ungleichung

$$\sqrt[2^{k+1}]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \cdot x_{n+1} \cdot \dots \cdot x_{2^{k+1}}} = \sqrt[2^{k+1}]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n \cdot (a_M)^{2^{k+1}-n}} \le \frac{\overbrace{x_1 + \dots + x_n}^{n \cdot a_M} + \left(2^{k+1} - n\right) \cdot a_M}{2^{k+1}} = a_M$$

Aus dieser Ungleichung folgt durch Potenzieren

$x_1 \cdot \dots \cdot x_n \cdot (a_M)^{2^{k+1}-n} \le (a_M)^{2^{k+1}}$, also $x_1 \cdot \dots \cdot x_n \le a_M^n$.

Somit ergibt sich jetzt mit (***)

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \le \frac{x_1 + \dots + x_n}{n},$$

wobei nach dem bisher Bewiesenen das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn $x_1 = \dots = x_n$ ist.

StD i.R. RICHARD GEISREITER, richard.geisreiter@t-online.de, Grafenberg 11, 83317 Teisendorf