Ma A 15/21_Online-Ergänzung

Kanten- und Flächensätze – Denkanstöße beim Arbeiten mit Stäbchen, Dreiecken und Vierecken (I)

SEBASTIAN KUNTZE

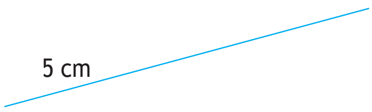
Online-Ergänzung

Kanten- und Flächensätze – Denkanstöße beim Arbeiten mit Stäbchen, Dreiecken und Vierecken (I)

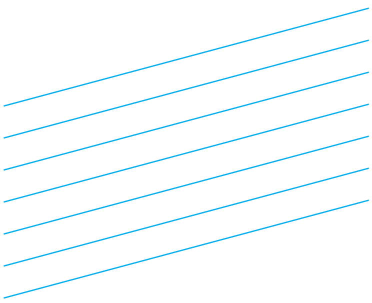
SEBASTIAN KUNTZE

Aufgaben wie die unten haben auf den ersten Blick weniger mit dem Beschreiben der Eigenschaften von Figuren und Körpern zu tun als vielmehr mit deren Herstellen. Dennoch findet beides statt, meist ermöglichen solche Aufgaben Zugänge auf verschiedenen Komplexitätsniveaus und sind daher »selbstdifferenzierend«. Das Spektrum reicht vom bastelnden Experimentieren bis zu Argumentationsproblemen, die sich ihrerseits auf verschiedenen Niveaus an Strenge bearbeiten lassen. Es ist offensichtlich, dass diese Aufgabenformate leicht erweiterbar und variierbar sind.

1. Hier sind vier Stäbchen, aus denen man Dreiecke (ein Stäbchen bleibt eventuell übrig) oder Vierecke legen kann.
   a) Versuche, drei verschiedene Dreiecke und drei verschiedene Vierecke zu legen. Untersuche, welche Figuren überhaupt entstehen können und beschreibe. Sind das alle Figuren? Unterscheide verschiedene Fälle und begründe.
   b) Was kannst du über Symmetrieeigenschaften der Dreiecke und Vierecke sagen? Kannst du deine Beobachtungen begründen?
   c)



   Hier ist ein weiteres Stäbchen, es soll in einem Viereck mit den Stäbchen oben zwei gegenüberliegende Ecken verbinden. Welche Fälle sind möglich? Warum nur diese?



2. Kann man aus diesem »Kantensatz« (d. h. aus dieser Menge von Stäbchen) eine Pyramide herstellen? Sind es zu viele Stäbchen oder braucht man zusätzliche? Du kannst mit Zahnstochern und Knete-Kügelchen experimentieren, wenn du es dir so besser vorstellen kannst. Gibt es eine Regel für die Stäbchenanzahl in Pyramiden-Kantensätzen?
3. Du hast Stäbchen mit drei verschiedenen Längen zur Auswahl. Kann es Pyramiden geben, bei deren Kanten alle drei Sorten vorkommen?

In Teil II wird es um Aufgaben gehen, bei denen nicht nur Kantensätze, sondern auch Flächensätze, d. h. »Baukästen« voller Begrenzungsflächen von Körpern vorkommen.

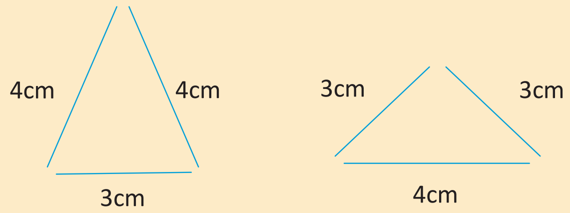
Lösungshinweise

Teil I:

1. Hier sind vier Stäbchen, aus denen man Dreiecke (ein Stäbchen bleibt eventuell übrig) oder Vierecke legen kann.

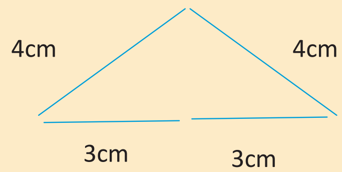
a) Versuche, drei verschiedene Dreiecke und drei verschiedene Vierecke zu legen. Untersuche, welche Figuren überhaupt entstehen können und beschreibe. Sind das alle Figuren? Unterscheide verschiedene Fälle und begründe.

Dreiecke:



Wählt man ein Kantenstäbchen aus, das weggelassen werden soll, so gibt es (bis auf Kongruenz) nur die beiden oben dargestellten Möglichkeiten, Dreiecke zu bilden. Die Dreiecke sind aufgrund der gegebenen Kantenlängen jeweils gleichschenklig.

Je nach „Spielregel" könnte es auch erlaubt sein, aus allen vier Stäbchen Dreiecke zu bilden. Dann wäre das rechts abgebildete Dreieck zusätzlich möglich, wenn man eine Dreiecksseite aus zwei 3cm-Stäbchen bildet.



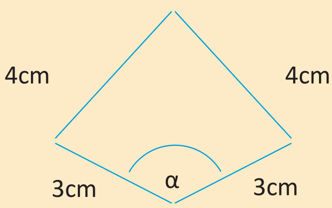
Prüfen der weiteren Möglichkeiten: Eine Dreiecksseite aus zwei 4cm-Stäbchen führt nicht zu einem Dreieck und eine Dreiecksseite aus einem 3cm- und einem 4cm-Stäbchen würde zu einem entarteten Dreieck führen, dessen drei Ecken auf einer Geraden liegen.

Vierecke:

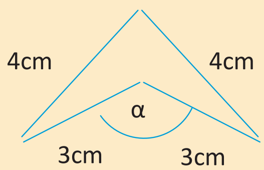
Hier gibt es unendlich viele Möglichkeiten, die verschiedenen Fällen zugeordnet werden können (überschlagene Vierecke beiseitegelassen):

Fall A: Gleich lange Seiten sind einander benachbart:

Drachenviereck



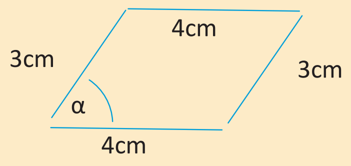
Drachenvogelviereck



mit jeweils $0<\alpha<180°$

Die entstehenden Vierecke müssen achsensymmetrisch sein, da sie (voraussetzungsgemäß) als Zusammensetzung zweier gleichschenkliger Dreiecke aufgefasst werden können.

Fall B: Gleich lange Seiten liegen einander gegenüber:



Aufgrund der gegebenen Seitenlängen muss ein Parallelogramm entstehen (wegen „wenn in einem Viereck gegenüberliegende Seiten paarweise gleich lang sind, dann sind sie auch paarweise parallel“).

b) Was kannst du über Symmetrieeigenschaften der Dreiecke und Vierecke sagen? Kannst du deine Beobachtungen begründen?

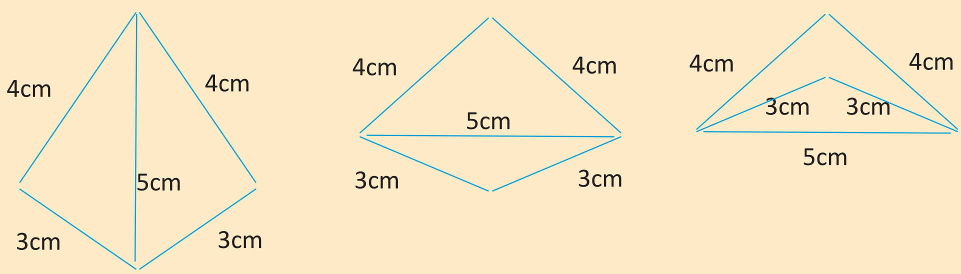
Die Dreiecke sind gleichschenklig, daher bezüglich der Mittelsenkrechten auf der Basis achsensymmetrisch.

Vierecke: In Fall A Achsensymmetrie bezüglich einer der Diagonalen (Begründung s.o.), in Fall B Punktsymmetrie bezüglich des Diagonalenschnittpunkts (da es sich um ein Parallelogramm handelt)

c)

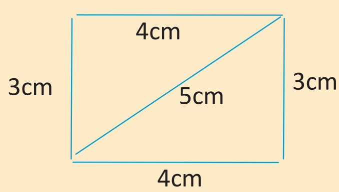
Hier ist ein weiteres Stäbchen, es soll in einem Viereck mit den Stäbchen oben zwei gegenüberliegende Ecken verbinden. Welche Fälle sind möglich? Warum nur diese?

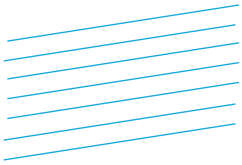
Ausgehend von Fall A:



Geht man von der linken Figur in Fall A in Teilaufgabe b) aus, so kann das Diagonalenstäbchen auf zwei Arten eingesetzt werden, die oben dargestellt sind (das Viereck links hat bekanntlich zwei rechte Innenwinkel, dies muss aber je nach Zielgruppe nicht unbedingt begründet werden). Ein weiterer Kongruenz-Typus eines Vierecks ergibt sich aus der rechten Figur in Fall A (Begründung jeweils beispielsweise mit Kongruenzsatz Seite-Seite-Seite). Fall B liefert den Spezialfall eines Rechtecks mit den Seitenlängen 3cm und 4cm:

(Sofern (3,4,5) als pythagoreisches Zahlentripel noch unbekannt ist, könnten die rechten Winkel im Rechteck auch einfach von den Lernenden „entdeckt“ werden.





2. Kann man aus diesem Kantensatz eine Pyramide herstellen? Sind es zu viele Stäbchen oder braucht man zusätzliche? Du kannst mit Zahnstochern und Knete-Kügelchen experimentieren, wenn du es dir so besser vorstellen kannst. Gibt es eine Regel für die Stäbchenanzahl in Pyramiden-Kantensätzen?

Mit 6 Stäbchen kann man ein regelmäßiges Tetraeder bauen, mit 8 Stäbchen eine vierseitige Pyramide, mit 10 Stäbchen eine fünfseitige Pyramide. Eine sechsseitige Pyramide mit gleich langen Stäbchen führt zum Entartungsfall eines regelmäßigen Sechsecks. (Dies ist eine Grenze für die bekannte Formel der 2n Kanten für eine n-seitige Pyramide).

Lässt man verschieden lange Stäbchen oder ein verlängerndes „Hintereinanderstecken" von Stäbchen zu, so bekommt man Formeln wie z.B. 3n Stäbchen für eine n-seitige Pyramide, die zur Spitze hin verdoppelte Pyramidenseitenlängen aufweist (doch auch hier gibt es eine Obergrenze für den Gültigkeitsbereich dieser Formel).

3. Du hast Stäbchen mit drei verschiedenen Längen zur Auswahl. Kann es Pyramiden geben, bei deren Kanten alle drei Sorten vorkommen?

Solche Pyramiden gibt es: Bildet man aus dem kürzesten und dem zweitkürzesten Stäbchen beispielsweise ein Rechteck und nimmt man die längste Stäbchensorte für die Verbindungen zur Pyramidenspitze, so erhält man immer (vierseitige) Pyramiden. Interessant ist auch die Untersuchung anderer Möglichkeiten, Pyramiden zu bilden.