

## Gaby Heintz, Guido Pinkernell und Florian Schacht: Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht

Rezensiert von Johanna Heitzer



Anlässlich des 65. Geburtstages von Hans-Jürgen Elschenbroich haben Gaby Heintz, Guido Pinkernell und Florian Schacht ein Buch über Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht herausgegeben.

Der erste Eindruck fällt positiv aus: ein schlicht, aber schön gebundenes, kompaktes DIN-A5-Taschenbuch, auf angenehm glattes Papier übersichtlich gesetzt und voller Abbildungen unterschiedlichster Art.<sup>1</sup> Insgesamt 32 Autorinnen und Autoren kommen zu Wort, mindestens 20 Typen mathematischer Soft- und Hardware wurden benutzt und werden vorgestellt. Die Beteiligten kommen aus Schule und Hochschule, sind mit Unterricht, Lehre, Fortbildung, Wissenschaft und Technik vertraut und haben sich allesamt entwickelnd, erprobend oder forschend mit dem Einsatz digitaler Werkzeuge bei der Mathematikvermittlung auseinander gesetzt.

Das Buch beginnt mit einem Foto des offenkundig fröhlich und wach gebliebenen Jubilars und endet mit einer komfortablen Zusammenstellung seiner über 22 Jahre verteilten Veröffentlichungen zum Thema. Ein Blick auf die Worte, die in Hans-Jürgen Elschenbroichs Beitragstiteln besonders häufig auftauchen, vermittelt einen guten Eindruck sowohl von dessen Leitgedanken als auch von dem, wozu man im vorliegenden Jubiläumsband Neues erwarten darf. Es sind die Substantive *Anschauung, Werkzeuge, Visualisierung, Kompetenzen, Geometrie* und *Funktionen*, die Adjektive *interaktiv, digital, dynamisch, intuitiv, kalkülfrei* und *elektronisch* und schließlich die Verben *entdecken* und *erkunden*.

### Überblick

Einführend würdigt das Herausgeberteam Hans-Jürgen Elschenbroich für ebenso reflektierte wie praxiserprobte Beiträge zum Themengebiet sowie für seine Rolle im Rahmen der Kommunikation von Wissenschaft, Aus- und Weiterbildung,

<sup>1</sup> Dass die Abbildungen in Art, Qualität und Größe stark differieren, erzeugt eine gewissen Unruhe, die jedoch ebenso mit der Entstehungsgeschichte wie mit dem Gegenstand des Buches zusammenhängt und insofern auch positiv als Lebendigkeit wahrgenommen werden kann. (Ein Abbildungsverzeichnis mit Urhebern, benutzter Technik oder Quellen fehlt.)

Bildungsadministration und Schule. Als zentrale Schritte werden die Arbeiten zur Bedeutung von Geometriesystemen im Kontext visuellen Beweisen und die Entwicklung elektronischer Arbeitsblätter genannt.

Zu den großen Vorzügen des Buches gehört, dass fast alle Autorinnen und Autoren sich seit Jahren oder sogar Jahrzehnten mit dem Thema auseinandersetzen. Sie werden also auf der Basis vielfältiger eigener Erfahrungen sowohl mit den gewachsenen und immer wieder veränderten technischen Möglichkeiten als auch mit dem Stand der Veröffentlichungen und Austauschplattformen zu ihrem Bereich vertraut sein und diese reflektiert einordnen können. Entsprechend der Breite dieser Autorenschaft ist das Buch in vier Bereiche eingeteilt:

„Aus der Schule, für die Schule“ verspricht dem Herausgebertrio zufolge, das Potential digitaler Werkzeuge und insbesondere den Mehrwert für authentische, reflektierte Auseinandersetzungen aufzuzeigen. Mit acht Beiträgen auf insgesamt 130 Seiten macht dieser Abschnitt mehr als ein Drittel des Buches aus und ist in gewissem Sinne der abwechslungsreichste.

„Fachdidaktische Beiträge“ verspricht Einblicke in die aktuelle Entwicklungs- und Forschungsarbeit zum Thema und macht gut ein weiteres Drittel des Buches aus. Die Beiträge sind naturgemäß fast ausschließlich von Hochschulangehörigen geschrieben und sehr unterschiedlich lang.

„Fachmathematische Beiträge“ verspricht aufzuzeigen, dass digitale Werkzeuge sowohl als sinnstiftende als auch als kreativ-ästhetische Hilfsmittel für die Fachmathematik nutzbar sind. Auch diese Beiträge stammen überwiegend von Hochschulvertretern. Der Abschnitt ist mit vier Beiträgen und fünfzig Seiten relativ kurz, mag aber dennoch für manche Leser der attraktivste sein.

„Praxisbeiträge“ verspricht, unterrichtspraktische Einsatzbeispiele konkret vorzustellen und besteht aus sechs kurzen Artikeln auf insgesamt knapp 40 Seiten. Hier kommen Zugänge, Verständnisförderung, schöne Mathematik am Rande des Lehrplans und die Dokumentation unter Einsatz digitaler Werkzeuge erzielter Ergebnisse im Unterricht zur Sprache.

### Zu ausgewählten Beiträgen

Aus offenkundigen Gründen kann in dieser Rezension nur auf ausgewählte Artikel eingegangen werden, und auch dies nur sehr knapp oder sogar nur schlaglichtartig. In meinem Fall beruht die Auswahl vor allem auf dem infolge Daumenprobe, Titel oder Autor bzw. Autorin für mich persönlich Vielversprechendsten. Zudem wurde berücksich-

tigt, wer dem Jubilar bzw. wem der Jubilar so wichtig ist, dass dies zu einem Vortrag auf der zugehörigen Festveranstaltung geführt hat. Außerdem habe ich natürlich versucht, die vier Abschnitte allesamt zu berücksichtigen und auch sonst die Breite der unterschiedlichen Beiträge ein wenig aufleuchten zu lassen.

Die so entstandene Auswahl ist kein Maß für Bedeutung oder Qualität der Beiträge im Einzelnen. Auch unter dem hier nicht explizit Erwähnten hat mir Manches ausnehmend gut gefallen. Ohnehin handelt es sich um ein Buch, aus dem die meisten Leser das für sie persönlich Interessanteste herauspicken und für sich Wertvolles finden werden.

Zum Abschnitt „Aus der Schule, für die Schule“ gehört ein Beitrag von Henning Körner über die Begriffe Bestand und Änderung und ein mit digitalen Werkzeugen unterstütztes Konzept zur Vermittlung der infinitesimalen Übergänge in der Sekundarstufe II. Körner beschreibt, an welchen Stellen im Unterricht grafikfähige Taschenrechner oder Funktionenplotter zum Einsatz kommen können, inwieweit sie an diesen Stellen hilfreich sind, welche Schülerfragen auftreten können, wo Gefahren lauern und wie man diese als Lehrer umgeht. Wie die Herausgeber des Bandes und viele weitere Autoren betont er, dass „Technik immer als Hilfe für Verstehen [...], aber nie als Selbstzweck“ dienen sollte. Insgesamt wird überzeugend dargestellt, wie Schülerinnen und Schüler durch die Arbeit mit digitalen Werkzeugen das Prinzip des „kontrollierten, bewusst gesteuerten Annäherns“ als eine Form der Grenzwertermittlung kennenlernen können.

Andreas Pallack wagt sich im gleichen Abschnitt an eine Einschätzung der näheren Zukunft des Medieneinsatzes und leitet daraus fünf Thesen über Verbreitung und Nutzung digitaler Medien in zehn Jahren ab. Die Thesen gründen unter anderem auf seiner Lesart einer niederländischen Studie von 2013, nach der die Lehrkraft-Haltung gegenüber dem Einsatz digitaler Werkzeuge sowie die Selbstwirksamkeit hinsichtlich der erfolgreichen Auseinandersetzung mit ihnen den mit Abstand größten Einfluss auf die gewinnbringende Nutzung im Unterricht haben. Zu den Thesen gehört das weitgehende Stagnieren der Entwicklung digitaler Werkzeuge selbst gegenüber deren noch lange wirkendem Einfluss auf die Weiterentwicklung von Mathematikunterricht. Schließlich werden drei Konsequenzen für Lehrerfortbildung und schuladministrative Entscheidungen gezogen, durch die der Einsatz digitaler Werkzeuge mit Sinn und Mehrwert gefördert werden könne.

Zu den „Fachdidaktischen Beiträgen“ gehört einer von Bärbel Barzel, in dem das „Arbeiten mit CAS aus fachdidaktischer Perspektive“ zusam-

mengefasst wird. Anders als in Deutschland wird in einigen Ländern schon seit den 1980ern intensive Forschung zum Einsatz von Computeralgebra-Systemen betrieben. Barzel erläutert die Erkenntnisse ausgewählter internationaler Studien zum Mehrwert von CAS und formuliert Thesen, die sich aus einer 2011 durchgeführten umfangreichen internationalen Literaturrecherche zum Stand der Forschung des CAS-Einsatzes ableiten lassen. Darüber hinaus geht Barzel auf die Bedeutung der Auswahl eines geeigneten Mediums ein, die von weit mehr als nur vom mathematischen Themenbereich gesteuert sein sollte.

Wie Barzel hat auch Colette Laborde aus Anlass des 65. Geburtstags vorgetragen. In ihrem von Rudolf Strässer übersetzten Beitrag wird – am Beispiel von Cabri – die Bedeutung der Interaktivität bei dynamischen, computergestützten Lernumgebungen herausgestellt. Laborde macht deutlich, wie der „Kreislauf der Interaktivität“ zwischen Aufgabe und Lernendem durch das Hinzukommen geeigneter digitaler Werkzeuge bereichert werden kann. Auch weil hierbei didaktische Rückmeldungen durch die Software selbst und die den Prozess begleitende Lehrkraft zur Sprache kommen, bestärkt der Beitrag mich persönlich in der These, dass digitale Werkzeuge eine der hilfreichen Antworten auf die Herausforderungen von Heterogenität und sprachlichen Unterschieden bergen.

Ein Beitrag von Reinhard Oldenburg betrifft die dynamische Erkundung der Semantik der Algebra. Oldenburg schlägt für Gleichungen in zwei Unbekannten ( $x$  und  $y$  oder auch  $x$  und  $f(x)$ ) das Programm FeliX1D als Vermittler zwischen der statischen Sicht der Logik (bestimmte Wertepaare machen die Aussageform zu einer wahren Aussage) und der dynamischen Sicht (Änderung eines der Werte bringt Änderung des anderen mit sich) vor. Hierbei können Variablen in einer Tabelle und auf einer Zahlengeraden abgelesen und verändert werden. In einer weiteren Tabelle sind Gleichungen oder Ungleichungen in den Variablen einzugeben. Ändert man nun den Wert einer Variable, muss sich auch der Wert einer anderen Variablen ändern, damit die Gleichung gültig bleibt.

Von Ulrich Kortenkamp und Jürgen Richter-Gebert stammt einer der „Fachmathematische Beiträge“. Er behandelt eine Frage mit hoher Aussicht auf Schülerinteresse und auch in diesem Sommer wieder besonders hoher Aktualität: Wie lässt sich beim Fußball mit zwei Kameras, Cam Carpets und einem DGS feststellen, ob ein Ball im Tor war oder nicht? Ausgangspunkt ist eine konkrete Szene, bei der durch ein einzelnes Foto darüber keine Entscheidung getroffen werden kann. Die Positionen von Spielern, Ball und Kamera werden dann auf

ein digitales Arbeitsblatt übertragen. Durch Einzeichnen einer zweiten Kamera sieht man, dass die Position des Balles (und der Spieler) bestimmt werden kann, wenn die Position der Kamera bekannt ist. Im Weiteren werden die Technik der Cam Carpets, der Zusammenhang mit Projektionen und ihr Nutzen für die Torlinienteknik besprochen.

Das ansprechende Umschlagbild des Buches stammt aus einer weltweiten Sammlung, die ebenfalls infolge der Arbeit von Richter-Gebert entstanden ist: Seine touch-basierte Mathematik-App iOrnament hat Nutzer so begeistert, dass ein Wettstreit um die schönsten und besten Anwendungen entstanden ist. Der Beitrag besticht durch den sehr breiten Blick auf Mensch, Maschine und Möglichkeiten, das sympatische Understatement bzgl. der hinter den Dingen steckenden Programmierkunst und den sehr ernst gemeinten Versuch, die Herausforderungen der Zukunft zu erkennen und anzunehmen.

Innerhalb der „Praxisbeiträge“ stammen zwei lesenswerte Beiträge von Hans-Jürgen Elschbroichs langjährigem Weggefährten Günter Seebach. Sie demonstrieren den Wert von GeoGebra bei Themen am Rande und in der Tiefe obligatorischer Lehrplaninhalte. Ebenfalls in diesem Abschnitt zeigt Heinz Klaus Strick, wie das Geburtstagsproblem als eines der klassisch erstaunlichen Ergebnisse aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung unter Einsatz digitaler Werkzeuge von den unterschiedlichsten Seiten (Simulation, Rechnung, Faustformel und andere Modellierungen) operativ durchdrungen werden kann. Dabei wird deutlich, wie die scheinbare Paradoxie sowohl intensiv kognitiv aktivierend eingesetzt als auch wieder aufgelöst und mit dem „gesunden Menschenverstand“ vereinbar gemacht werden kann.

## Fazit

In meinen Augen hat der Band Schwächen aus zwei mit Entstehungsgeschichte und Zuschnitt verbundenen Gründen: Zum einen haben verständlicherweise einige Autoren nicht eigens für diesen Band etwas konzipiert, sondern aus dem Vorhandenen geschöpft. Das führt vereinzelt zu Kombinationsartikeln aus wenig zusammenhängenden Teilen. Auch haben es sich in meinen Augen einzelne Autoren leichter gemacht, als es für einen Gewinn auf Leserseite nötig wäre.

Die zweite verständliche Schwäche, derer man sich als Leser bewusst sein sollte, liegt darin, dass es sich bei den Autorinnen und Autoren ausnahmslos um „in der Sache Begeisterte“ handelt, die zwar konsequent und glaubhaft für einen reflektierten Einsatz digitaler Werkzeuge stehen, den potentiellen Nachteilen im Rahmen dieses Bandes

aber aus offenkundigen Gründen wenig Platz eingeräumt haben. So werden zum vielbeschworenen Mehrwert des Einsatzes digitaler Werkzeuge nicht durch alle Beiträge mögliche Zweifel ausgeräumt. Die Chancen und Vorteile dominieren stark, die zugehörigen Thesen bleiben aufrichtigerweise in der „kann“-Form. So wird ein optimaler Einsatz unausgesprochen vorausgesetzt; aber nur in Ausnahmefällen darauf eingegangen, was dies wirklich heißt und wie es erreicht werden kann.

Man kann dies mit erneutem Bezug auf die Einleitung des Herausgeberteams auch so sagen: Dem Buch liegt die Überzeugung zugrunde, dass Unterricht zeitgemäß sein sollte – zeitgemäß und dabei dann gut, wohlgeordnet. Ob es Zeiten gibt, in denen Anpassung an das Aktuelle und Qualität schwer bis nicht vereinbar sind, und was dann gilt, darf in anderen Büchern stehen.

Dennoch leistet das Buch eine Menge. So wird unter anderem aufgezeigt, dass digitale Werkzeuge

- von konstitutiver Bedeutung für die Verstehensorientierung sein können (Körner),
- eine bequeme Fortsetzung elementarerer enaktiver Aneignungsformen mit Blick auf die Handlungsorientierung sein können (Heintz),
- die Erweiterung mathematischer Begriffe und Verfahren vom Zwei- ins Dreidimensionale schneller und nahtloser machen können (Lindner / Hohenwarter),
- didaktische Überzeugungen in neuer Weise umzusetzen erlauben (Rüsing, Schmidt),
- den „Kreislauf der Interaktivität“ von Aufgabe und Lerner bereichern können (Laborde),
- neue Anwendungen und Umsetzungen didaktischer Theorien wie der Tätigkeitstheorie ermöglichen (Richter/Bruder),
- sowohl bei der täglichen Arbeit als auch bei Tests helfen können (Greefrath/Ries),
- mit der Werkzeugsprache neben dem Fachlichen und der Fachsprache eine bei richtiger Einführung bereichernde Komponente in den Lernprozess einbringen (Schacht),
- Visualisierungsmöglichkeiten mit sich bringen, die Anlass für die Thematisierung sonst schwer behandelbarer fundamentaler Sätze sein können (Henn/Müller),
- mit ihren Einsatzmöglichkeiten ein Beispiel geben, wo die Hochschullehre mit Gewinn etwas von der schulischen abzuschauen hätte (Köpf),
- hinsichtlich der Rolle von Beweisen in der Schule neue Motivation und neue Wege eröffnen können (Elschenbroich, wiedergegeben in der Einleitung) und
- der Lehrkraft neue Kapazitäten und Möglichkeiten für die Diagnose und individuelle Förderung geben können (Schacht, Laborde).

Es handelt sich naturgemäß weder um eine systematische Gesamtdarstellung noch um eine kritische Reflexion. Es handelt sich – zum Anlass passend – um einen Blumenstrauß, und zwar um einen attraktiven. Als Band mit eher „leichtem“ Charakter übertrifft das Buch vieles ernster Angesezte in der konstruktiven Auseinandersetzung mit einem Thema, das zu ignorieren oder durch die Überbetonung von Schwächen und Gefahren „auszubremsen“ sich angesichts der Bedeutung elektronischer Hard- und Software sowohl im Alltag heutiger Schülerinnen und Schüler als auch in der heutigen Wissenschaft Mathematik schlicht verbietet.

Gaby Heintz, Guido Pinkernell und Florian Schacht: *Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht. Festschrift für Hans-Jürgen Elschenbroich*. Neuss: Klaus Seeberger, 2016. ISBN 978-3-940516-20-6, EUR 33€ (für MNU-Mitglieder 28€).

Das Buch kann im Buchhandel und unter [www.mnu.de/bestellung-festschrift](http://www.mnu.de/bestellung-festschrift) bestellt werden.

Johanna Heitzer, Lehr- und Forschungsgebiet Didaktik der Mathematik, RWTH Aachen, 52056 Aachen, Email: [johanna.heitzer@matha.rwth-aachen.de](mailto:johanna.heitzer@matha.rwth-aachen.de)