MNU Themenreihe Bildungsstandards

Grundlegendes Wissen und Können am Ende der Sekundarstufe II: Zentrale Begriffe und Verfahren beherrschen und verstehen

Guido Pinkernell, Heidelberg; *Hans-Jürgen Elschenbroich,* Korschenbroich; *Gaby Heintz,* Neuss; *Henning Körner,* Oldenburg; *Hubert Langlotz,* Eisenach; *Andreas Pallack,* Soest

Herausgeber:
Deutscher Verein zur Förderung
des mathematischen
und naturwissenschaftlichen
Unterrichts e. V.

www.mnu.de

Zusammenfassung

Dieses Papier enthält die Ergebnisse einer vom MNU initiierten und unterstützten Arbeitsgruppe zum Thema „Basiskompetenzen am Ende der Sekundarstufe II“ und versteht sich als ein Beitrag zur Diskussion über mathematisches Grundwissen und -können am Übergang von der Schule zur Hochschule. Während vielerorts in Anforderungskatalogen präzisiert wird, was man für das jeweils angestrebte Studium beherrschen muss, halten wir die Frage danach, wie es beherrscht wird, ebenfalls für wichtig. Denn wohl alle an dieser Diskussion Beteiligten dürften darin einig sein, dass die jeweils geforderten notwendigen Kenntnisse und Fertigkeiten nicht blind wiedergegeben, sondern verstanden sein müssen. Was man aber unter einem „Verstehen grundlegenden Wissens und Könnens“ begreifen kann und insbesondere wie es sich in Aufgaben ausdrückt, wird in diesem Papier am Beispiel von Inhalten der Analysis konkretisiert.

01

Einleitung

„Der Unterricht in der gymnasialen Oberstufe vermittelt eine vertiefte Allgemeinbildung, allgemeine Studierfähigkeit sowie wissenschaftspropädeutische Bildung." So wird ein Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 7.7.1972 in den kürzlich veröffentlichten Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife zitiert (Kultusministerkonferenz 2012). Das Abitur bescheinigt also unter anderem eine allgemeine Studierfähigkeit. Dies impliziert aber nicht, dass die Schule einen Abiturienten auf alle spezifischen Anforderungen vorbereiten soll, die mancherorts für ein Studium der Mathematik, Naturwissenschaften oder Ingenieurswissenschaften vorausgesetzt werden. Aber auch die Kenntnisse und Fertigkeiten, die in der Schule behandelt werden, sind bekanntermaßen nicht bei allen Studienanfängern ohne Weiteres vorauszusetzen.

Dieser Artikel soll verdeutlichen was es heißt, grundlegendes mathematisches Wissen und Können verständig bzw. im Sinne Weinerts (1996) „intelligent" zu beherrschen. Eine Konkretisierung grundlegenden Wissens und Könnens durch Inhalte darf sich also nicht in einer Auflistung von Kalkülfertigkeiten erschöpfen, sondern muss deutlich machen, dass sich die genannten Kenntnisse und Fertigkeiten durch Vernetzung, Flexibilität und Situationsunabhängigkeit in der Anwendung auszeichnen müssen (Pinkernell & Greefrath 2011). Dies soll hier am Beispiel von Inhalten der Analysis geschehen, so wie sie durch die Kultusministerkonferenz in den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife festgelegt worden sind.

02

Was verstehen wir unter „Basiskompetenzen“?

Wir betrachten den Begriff „Basiskompetenzen“ aus der Schulperspektive. Hieraus ergeben sich im Vergleich zu anderen Konzepten z.B. der Hochschulperspektive spezifische Setzungen, die an dieser Stelle festgehalten werden müssen.

- Unter Basiskompetenzen aus Schulperspektive verstehen wir das grundlegende Wissen und Können am Abschluss der beiden Sekundarstufen. Dabei umfasst dieses Wissen und Können wesentliche Begriffe, Sätze und Verfahren der beiden Sekundarstufen, die sicher und verständig verfügbar sind. Wir orientieren uns ausdrücklich nicht an den spezifischen Anforderungen einzelner mathematikhaltiger Studiengänge, sondern mehr am Allgemeinbildungsauftrag gymnasialen Unterrichts.

- Unsere Auswahl der Inhalte orientiert sich an den Zielformulierungen der aktuellen Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife, die wir in diesem Papier am Beispiel von Inhalten der Analysis konkretisieren. Die Zielformulierungen der Bildungsstandards nennen zentrale Begriffe, Sätze und Verfahren. Diese sicher und verständig zu beherrschen ist das, was wir unter Basiskompetenzen verstehen. Dabei sind relevante Inhalte der Sekundarstufe I immer impliziert.

- Eine sichere Verfügbarkeit zentraler Begriffe, Sätze und Verfahren äußert sich in Aufgaben, die diese Wissensgegenstände gezielt in den Blick nehmen und hierzu komplexarm formuliert und von geringem Schwierigkeitspotential sind. In diesem Sinne zeigen sie die notwendige Wissensbasis für einen Kompetenzaufbau in weiterführenden Lernsituationen, z.B. im Studium.

- Eine verständige Verfügbarkeit zeigt sich dadurch, dass die Aufgaben den einzelnen Begriff, Satz oder das einzelne Verfahren aus verschiedenen Perspektiven ins Auge fassen. Dieser Variationsreichtum operationalisiert den verständigen Zugang zum einzelnen Begriff, Satz oder Verfahren.

- Basiskompetenzen verstehen wir primär als Inhaltskompetenzen. Basiskompetenzen sollen Grundlage eines breiteren Kompetenzaufbaus sein. Im Sinne des „intelligenten Wissens“ Weinerts gelingt dies, wenn zentrale Inhalte flexibel und verständig verfügbar sind. Die primäre Orientierung an Inhalten schließt eine Kompetenzorientierung mit ein, wie die nachfolgenden Ausführungen zum Verstehenskonzept und insbesondere die Beispielaufgaben im Abschnitt 5 deutlich machen.

Aus der Forderung nach flexibler Verfügbarkeit grundlegender mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten ergibt sich auch ihre hilfsmittelfreie Verfügbarkeit, etwa in Prüfungssituationen. Insbesondere sind die Beispielaufgaben im Abschnitt 5 ohne den Einsatz digitaler oder anderer Hilfsmittel wie eine Formelsammlung zu bewältigen. Hieraus kann aber nicht die Forderung nach einem „hilfsmittelfreien Unterricht“ abgeleitet werden. Wir betrachten digitale Werkzeuge unabhängig von ihrer offensichtlich nicht hintergehbaren Verfügbarkeit als konstitutiv wirkende Hilfsmittel beim Modellieren, Visualisieren und Explorieren (diesbezügliche Werkzeugkompetenzen werden in Heintz et al. (2015) thematisiert). Der Nachweis der ganzen Bandbreite mathematischer Kompetenzen, zum Beispiel im Abitur, kann sich also nicht auf die Prüfung der hier dargelegten Basiskompetenzen beschränken. Für diesen Nachweis sind daher auch in Prüfungen geeignete, aus dem Unterricht bekannte digitale Werkzeuge zur Verfügung zu stellen (vgl. Bildungsstandards 1.4, S.12f.)

03

Beherrschen und Verstehen

Wir sind der Überzeugung, dass der Verstehensbegriff mit seiner Vielzahl an Ausprägungen grundsätzlich zu einer sinngebenden Auffächerung der Zugänge zu den geforderten Inhalten führen kann, die die mit dieser Thematik oft ausschließlich assoziierte „Kalkülorientierung“ vermeidet und in ihrer Gesamtheit das abbildet, was als flexible Verfügbarkeit grundlegenden Wissens und Könnens gemeint sein kann. Grundlegende Begriffe und Verfahren zu verstehen heißt also, über aspektreiche Zugänge zu diesen Inhalten zu verfügen.

Uns erscheinen vier Aspekte des Verstehens wichtig:

1. Verfahren im operativen Sinne beherrschen.

   Das operative Beherrschen eines Verfahrens umfasst mehr als ein prozedurhaftes und korrektes Abarbeiten einzelner vorgegebener Schritte. Es meint das produktive Anwenden des Verfahrens, etwa durch situationsangemessenes Modifizieren und Reorganisieren der Einzelschritte. Das operative Beherrschen zeigt sich insbesondere in der erfolgreichen Bearbeitung unterschiedlicher Variationen von Grundaufgaben.

2. Grundvorstellungen aktivieren und Fehlvorstellungen erkennen.

   Grundvorstellungen sind fachlich angemessene mentale Modelle zu einem Begriff oder Verfahren. Sie bilden ein kognitives Netz an sinngebenden Interpretationen des Begriffs, die in unterschiedlichen Problemsituationen reaktiviert werden und so heuristisch wirken können. Fehlvorstellungen sind persistent falsche Assoziationen, Interpretationen oder Anwendungen eines mathematischen Konzepts. Sich typischer Fehlvorstellungen bewusst zu sein ergänzt unser Verstehensmodell.

3. Repräsentationswechsel durchführen.

   Mathematische Begriffe und Verfahren sind im Wesentlichen abstrakter Natur. Jeder Zugang zu diesen Objekten erfolgt über Repräsentationen dieser Begriffe und Verfahren. Verstehen aus dieser Perspektive zu beschreiben heißt zu fordern, dass eine Repräsentation eines Objekts durch andere Repräsentationen desselben Objekts erklärt werden kann. Ein Beispiel sind die Standardrepräsentationen zum Funktionsbegriff: Gleichung, Wertetabelle und Graph. Die Fähigkeit zum kohärenten Wechsel zwischen verschiedenen Repräsentationen desselben Begriffs ist Ausdruck eines verständigen Zugangs zum Lerngegenstand.

4. Begriffe und Verfahren in inner- und außermathematischen Kontexten anwenden.

   Ein zentraler Aspekt der flexiblen Verfügbarkeit von Wissen ist seine Anwendbarkeit in unterschiedlichen Situationen. In diesem Zusammenhang erscheint der Begriff des „Mathematisierungsmusters“ hilfreich. Hierunter versteht man Begriffe und Verfahren, über die man mit Blick auf ihre mögliche Anwendungsbereiche und -beschränkungen reflektiert verfügt. Solche Anwendungsbereiche können dabei Situationen der Lebenswelt sein, aber auch innermathematische Problemstellungen.

Für uns gilt ein mathematischer Inhalt dann als verstanden, wenn zentrale mit diesem Inhalt assoziierte Verfahren im operativen Sinne beherrscht werden, entsprechende Grundvorstellungen aktiviert bzw. typische Fehler vermieden werden, zwischen typischen Repräsentationen dieses Inhalts sinnstiftend gewechselt und zentrale Verfahren und Begriffe in inner- und außermathematischen Kontexten angewendet werden können. Diese vier Kriterien zeigen nicht notwendigerweise disjunkte Aspekte des Verstehens auf, wirken unseres Erachtens aber hinreichend differenzierend für die Ausweisung aspektreicher Zugänge zu einem gegebenen mathematischen Inhalt.

04

Verstehen und Prozess

Der Begriff „Basiskompetenzen“ in unserem Sinne meint auch die Berücksichtigung von Prozesskompetenzen über die verständige Verfügbarkeit zentraler Begriffe, Sätze und Verfahren der Sekundarstufen hinaus. So sind die Prozesskompetenzen „Modellieren“, „Argumentieren“ und „Problemlösen“ hier zwar nicht expliziter Teil des Konzepts, finden sich aber in den Operatoren verschiedener Beispielaufgaben wieder. Es werden mancherorts Begründungen eingefordert, und in manchen Fällen sind numerische oder graphische Überlegungen notwendig, um eine quantitative Lösung zu ermitteln. Außerdem beinhalten die unserem Konzept zugrundeliegenden vier Aspekte des Verstehens (vgl. Abschnitt 3) in der Konkretisierung in Aufgaben an vielen Stellen auch Aspekte des Modellieres und Argumentierens.

05

Aufgaben

Mit den folgenden Aufgaben konkretisieren wir das eingangs skizzierte Verstehenskonzept für grundlegendes Wissen und Können, und zwar an Inhalten der Oberstufenanalysis, so wie sie von der Kultusministerkonferenz in den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife beschlossen wurden (Kultusministerkonferenz 2012). Aus Gründen der Übersichtlichkeit haben wir die dort aufgeführten inhaltlichen Zielformulierungen wie folgt zusammengefasst:

Ableitungen und bestimmte Integrale deuten und bestimmen:

1. die Ableitung einer Funktion f an einer Stelle als lokale Änderungsrate und als Steigung einer Tangente an G_f deuten
2. das bestimmte Integral über eine Funktion f als (re-)konstruierten Bestand und als eine durch G_f begrenzte Fläche deuten
3. Änderungsraten und Tangentensteigungen sowie Bestände und Flächeninhalte numerisch, graphisch bzw. algebraisch bestimmen

Prozesse mittels Ableitungs- und Integralfunktionen beschreiben:

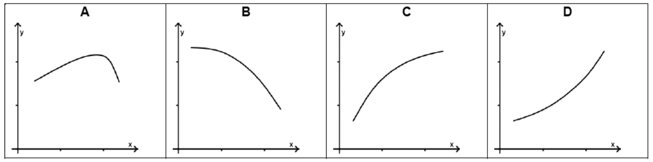
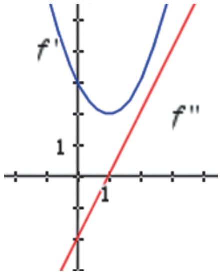
4. Änderungsraten und rekonstruierte Bestände in Form von Ableitungs- und Integralfunktionen funktional beschreiben und interpretieren

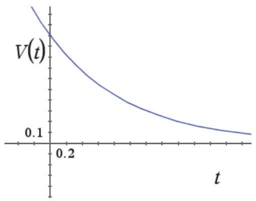
Funktionen mittels Differenzial- und Integralrechnung beschreiben:

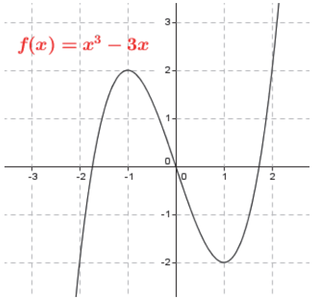
5. zur algebraischen Bestimmung von Ableitungsfunktionen die Faktor-, Summen- und Produktregel nutzen (und die Kettenregel nur in einfachsten Fällen)
6. zur algebraischen Bestimmung von Stammfunktionen die Faktor- und Summenregel nutzen
7. Monotonieeigenschaften und insb. Extrema von Funktionen bestimmen

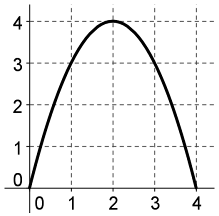
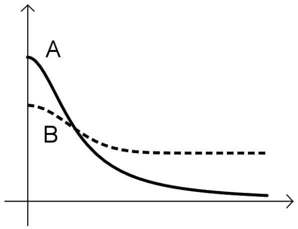
Die Aufgaben sind diesen sieben Zielformulierungen zugeordnet. Jede Aufgabe ergänzen wir durch Lösungshinweise sowie durch Zuordnungen zu den vier Aspekten des Verstehenskonzepts. Diese Zuordnungen sind nicht jedes Mal vollständig ausgeführt, sie verdeutlichen aber in ihrer Gesamtheit, wie die Aufgaben einen verständigen Zugang zu den Inhalten konkretisieren.

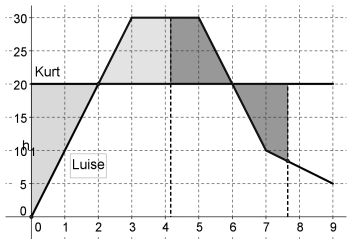
Als zu berücksichtigende Funktionstypen übernehmen wir die in den Bildungsstandards genannten Funktionen der Sekundarstufe I, welche lineare, quadratische, Potenz-, Sinus- (und Cosinus-)funktionen umfassen. Die Exponentialfunktionen der Form $f(x)=b^x$ werden ausgeschlossen, die e-Funktion bzw. Sinus- und Cosinusfunktion können mit einfachsten Parameterwerten im Rahmen von Anwendungen der Kettenregel verwendet werden.

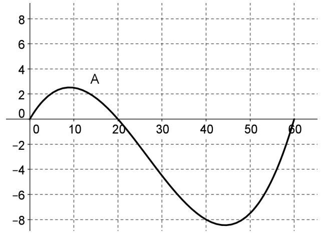
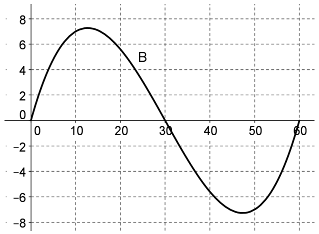
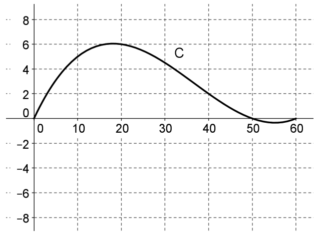
	Aufgabe	erwartete Lösungen	operationales Beherrschen entsprechender Verfahren	Grundvorstellungen aktivieren, Fehlvorstellungen vermeiden	Wechsel zwischen üblichen Repräsentationsformen durchführen	typische Anwendungen in inner- und außermathematischen Kontexten
1. Die Ableitung einer Funktion f an einer Stelle als lokale Änderungsrate und als Steigung einer Tangente an G_f deuten						
1.1	Betrachte die aufgeführten Aussagen zu Änderungen. 1. **Na endlich!** Rückgang der Arbeitslosenzahlen beschleunigt sich. 2. **Schulentwicklung** Dramatischer Rückgang der Schülerzahl 3. **Klimakatastrophe** Die Durchschnittstemperaturen wachsen immer schneller. 4. **Erfreulich!** Die Zunahme der Verkehrsunfälle konnte verringert werden. Welcher der folgenden Graphen könnte zu welcher Schlagzeile passen?  *(aus: Neue Wege 2010)*	1. B (A) 2. A (B) 3. D 4. C		Vergleich der beschriebenen und dargestellten Prozesse hinsichtlich ihres Änderungsverhaltens	kohärenter Wechsel zwischen den graphischen und verbalen Repräsentationen von Prozessen	Interpretation des Ableitungsbegriffs im Sachzusammenhang
1.2	Welche Eigenschaften der Funktion f kann man den abgebildeten Graphen f' und f" entnehmen? Es sind alle wesentlichen Eigenschaften von f' und f" zu erkennen.  (A) f hat bei x = 1 eine Extremstelle (B) f kann keine Extremstellen haben (C) f hat bei x = 1 eine Wendestelle (D) f hat bei x = 1 eine Sattelstelle	nur (B) und (C) sind richtig		Verständnis über notwendige und hinreichende Bedingungen für das Vorliegen besonderer Funktionseigenschaften aktivieren	Informationsentnahme aus einer graphischen Darstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingung	
1.3	Für eine Funktion f gelte: f'(5)=0. Was lässt sich hieraus folgern? (A) f hat an der Stelle x=5 den Wert 0. (B) Der Graph von f hat an der Stelle x = 5 einen Extrempunkt. (C) Der Graph von f hat an der Stelle x = 5 einen Sattelpunkt (D) Der Graph von f hat an der Stelle x = 5 einen Extrem- oder Sattelpunkt.	Nur (D) ist richtig		den bekannten Fehler vermeiden, nach dem nur das notwendige Kriterium für das Vorliegen einer Extremstelle beachtet wird		

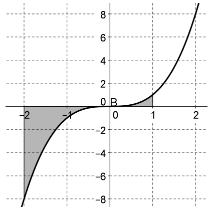
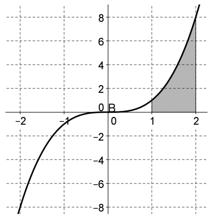
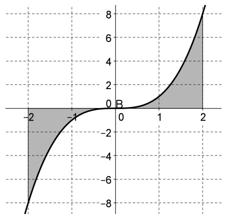
Aufgabe		erwartete Lösungen	operationales Beherrschen entsprechender Verfahren	Grundvorstellungen aktivieren, Fehlvorstellungen vermeiden	Wechsel zwischen üblichen Repräsentationsformen durchführen	typische Anwendungen in inner- und außermathematischen Kontexten
1.4	Welche beiden Informationen über f beinhaltet der folgende Satz: G_f hat im Punkt P(2,1) die Steigung 3.	1. f(2) = 1 2. f'(2) = 3			Übersetzen einer verbalen Beschreibung eines graphischen Sachverhalts durch eine algebraische Darstellung	
1.5	Eine Kugel rollt eine schiefe Ebene hinunter. Es gilt: $s(t) = 0{,}2\,t^2$ (s: Weg in Metern, t: Zeit in Sekunden). Wie schnell ist die Kugel nach 2,5 Sekunden?	Berechnung mittels Ableitungsfunktion s' bzw. mittels der lokalen Änderungsrate über den Differenzenquotienten: v(2,5)=1m/s	Grundaufgabe einer typischen Anwendungsaufgabe			Deuten der lokalen Änderungsrate einer Zeit-Weg-Funktion als Geschwindigkeit
1.6	Ein Flüssigkeitsbehälter wird durch ein Ventil entleert. Zum Zeitpunkt t befindet sich im Behälter eine Flüssigkeitsmenge mit einem Volumen V(t). Das folgende Diagramm beschreibt den Entleerungsprozess:  Stelle die „mittlere Abflussgeschwindigkeit in einem Zeitintervall" und „momentane Abflussgeschwindigkeit zu einem Zeitpunkt" im Diagramm graphisch dar.	Der Funktionsgraph wird durch eine Sekante über einem Intervall $[t_1; t_2]$ bzw. eine Tangente zu einer Stelle t_0 mit der Anmerkung ergänzt, dass deren Steigungen die angegebenen Begriffe quantifizieren.			Die Ableitung an einer Stelle t_0 mit der Anmerkung ergänzt, dass deren Steigungen die angegebenen Begriffe quantifizieren.	Anwendungsproblem
1.7	Gegeben seien zwei Funktionen f und g mit f(x) = g(x) + 2 und g'(3) = 5. (a) Wie geht G_f aus G_g hervor? (b) Wie groß ist f'(3)?	(a) G_f ist das Ergebnis einer Verschiebung von G_g um 2 Einheiten in y-Richtung. (b) f'(3) = 5		Die Ableitung an einer Stelle x_0 kann als Steigung des Funktionsgraphen an dieser Stelle interpretiert werden. Die Steigung bei x_0 ändert sich bei einer Verschiebung in y-Richtung nicht.	Der geschilderten Überlegung liegen graphische Interpretationen der Situation zugrunde.	

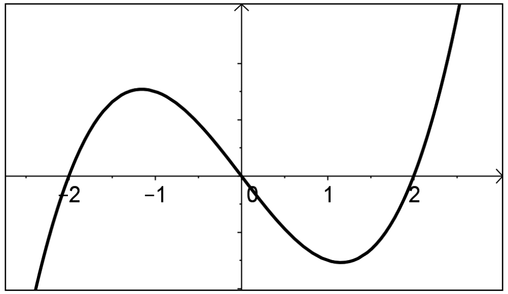
Nr.	Aufgabe	erwartete Lösungen	operationales Beherrschen entsprechender Verfahren	Grundvorstellungen aktivieren, Fehlvorstellungen vermeiden	Wechsel zwischen üblichen Repräsentationsformen durchführen	typische Anwendungen in inner- und außermathematischen Kontexten
1.8	Dargestellt ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x$.  (a) Gehört P(2; 2) zum Graphen von f? (b) Wie groß ist die Steigung an der Stelle x= 2? (c) Wo beträgt die Steigung 9? (d) In welchem Bereich ist $f''(x)>0$? (e) Wo liegen die Nullstellen von f'?	(a) ja (b) 9 (c) $x = -2$ oder $x = 2$ (d) $x > 0$ (e) $x = -1$ oder $x = 1$	u.A. die Bestimmung einer Tangentensteigung als Grund- und Zielumkehraufgabe	Der Zusammenhang Steigung und erster Ableitung an einer Stelle wird thematisiert	Die in algebraischer Form erfragten Funktionseigenschaften sind zum Teil algebraisch, zum Teil graphisch zu bestimmen	
1.9	Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2 + ax + b$ hat im Punkt P(2; 4) die Steigung 3. Berechnen Sie a und b.	$a = -1$ und $b = 2$	Eine Aufgabe mit Zielumkehr			Die Interpretation der Ableitung an einer Stelle als Steigung wird in einer innermathematischen Fragestellung angewendet
1.10	Begründe, welche der folgenden Aussagen für lineare, quadratische bzw. Polynomfunktionen dritten Grades zutreffen? Der Graph hat in jedem Fall … (A) keine lokalen Extrempunkte (B) einen Wendepunkt (C) einen Sattelpunkt	Für Polynomfunktionen ersten Grades ist nur (A) richtig, für Polynomfunktionen zweiten Grades sind alle Aussagen falsch, für Polynomfunktionen dritten Grades ist nur (B) richtig		Grundlegendes Verständnis der Begriffe lokaler Extrempunkt, Wendepunkt und Sattelpunkt erforderlich	Wechsel zwischen graphischer und algebraischer Ebene nötig	

	Aufgabe	erwartete Lösungen	operationales Beherrschen entsprechender Verfahren	Grundvorstellungen aktivieren, Fehlvorstellungen vermeiden	Wechsel zwischen üblichen Repräsentationsformen durchführen	typische Anwendungen in inner- und außermathematischen Kontexten
2. Das bestimmte Integral über eine Funktion f als (re)konstruierten Bestand und als eine durch G_f begrenzte Fläche deuten						
2.1	 Der Graph zeigt die Zeit-Geschwindigkeit-Funktion eines sich bewegenden Objekts. Welche Aussagen sind wahr? Geben Sie eine Begründung. Bei t = 2… (A) wird die maximale Geschwindigkeit erreicht. (B) wird die maximale Wegstrecke erreicht (C) ist die Beschleunigung gleich 0.	(A): Der Graph zeigt die Geschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt an, die maximale Geschwindigkeit liegt also bei t=2. (C) „Beschleunigung" ist die Änderung der Geschwindigkeit, also Ableitung. In t=2 ändert sich die Geschwindigkeit nicht, die Beschleunigung hat also den Wert 0.		Nicht der visuelle Eindruck in der graphischen Darstellung entscheidet über das Vorliegen eines Maximums oder Nullstelle, sondern die Funktion der Zeit, auf die sich die genannte Eigenschaft bezieht.		Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung als typische physikalische Anwendungen
2.2	 Die Graphik gibt für zwei Fahrzeuge A und B zu jedem Zeitpunkt den momentanen Kraftstoffverbrauch an. (a) Welches Fahrzeug hat über den gezeigten Zeitraum insgesamt einen höheren Verbrauch? (b) Welches Fahrzeug fährt über einen längeren Zeitraum schneller?	(a) B: Fläche unterhalb des Graphen im Zeitraum größer als die Fläche bei A. (b) Keine eindeutige Aussage möglich. Wenn es derselbe Autotyp ist und mit höherem Verbrauch eine höhere Geschwindigkeit einhergeht, dann (B).		In (a) ist die Grundvorstellung des bestimmten Integrals als Bestandsrekonstruktion über dem gezeigten Zeitintervall zu aktivieren.		In (b) ist ein möglicher Modellierungsfehler zu beachten: Ein höherer Verbrauch ist nicht unbedingt gleichbedeutend mit höherer Geschwindigkeit.

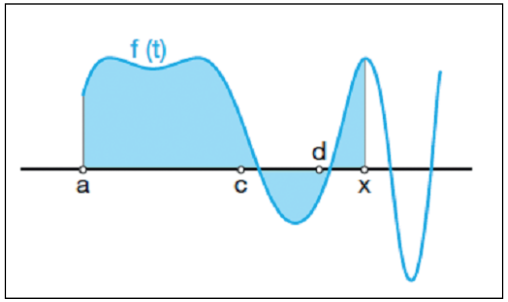
Aufgabe		erwartete Lösungen	operationales Beherrschen entsprechender Verfahren	Grundvorstellungen aktivieren, Fehlvorstellungen vermeiden	Wechsel zwischen üblichen Repräsentationsformen durchführen	typische Anwendungen in inner- und außermathematischen Kontexten
2.3	Das Diagramm zeigt jeweils die „Zeit-Geschwindigkeits-Funktion“ der Lastkähne „Luise“ und „Kurt“, die von derselben Stelle aus auf dem Küstenkanal in die gleiche Richtung neun Stunden lang fahren.  Begründen Sie Ihre Antworten der folgenden Fragen auch mithilfe von Skizzen: (a) Wer fährt in den neun Stunden länger mit höherer Geschwindigkeit? (b) Wer ist nach neun Stunden weiter gefahren? (c) Wann gibt es Überholvorgänge? Wer überholt wen? *(aus: Neue Wege 2010)*	(a) Kurt fährt insgesamt fünf Stunden lang schneller als Luise. (b) Kurt, denn die Fläche zwischen Kurt und der x-Achse ist größer als die Fläche zwischen Luise und der x-Achse. (c) Überholvorgänge: Nach etwas mehr als vier Stunden überholt Luise, ehe Kurt nach ca. 7,5 Stunden wieder überholt.  		Beide mit dem Integralbegriff assoziierten Grundvorstellungen (Rekonstruktion und Fläche) sind zu aktivieren und eine Verwechslung von Weg und Geschwindigkeit zu vermeiden.		

	Aufgabe	erwartete Lösungen	operationales Beherrschen entsprechender Verfahren	Grundvorstellungen aktivieren, Fehlvorstellungen vermeiden	Wechsel zwischen üblichen Repräsentationsformen durchführen	typische Anwendungen in inner- und außermathematischen Kontexten
2.4	Die Graphen modellieren die Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit von drei Helikoptern innerhalb eines einminütigen Fluges. Sie starten an derselben Stelle.    Geben Sie jeweils Begründungen an: (a) Welcher Hubschrauber fliegt am höchsten? (b) Welcher Hubschrauber hat die größte Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit? (c) Welcher Hubschrauber landet auf der Ausgangshöhe, welcher höher, welcher tiefer? *(aus: Neue Wege 2015)*	(a) C, denn hier ist die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse oberhalb der x-Achse am größten. (b) A weist die größte Sinkgeschwindigkeit auf, denn der Graph zeigt den kleinsten y-Wert (ca. –8,5). Und B weist die größte Steiggeschwindigkeit auf, denn der Graph weist den größten y-Wert auf (ca. 7). (c) B landet auf der Ausgangshöhe, denn die Fläche zwischen Kurve und x-Achse ist oberhalb genauso so groß wie unterhalb. Ein analoger Vergleich von Teilflächen führt zu Lösungen der anderen beiden Teilfragen.		Mit der Fehlvorstellung „Hochpunkt des Graphen einer Änderungsfunktion zeigt das Maximum des Bestandes“ wird eine typische Fehlvorstellung aufgegriffen.	Interpretation von graphischen Informationen im gegebenen Kontext	

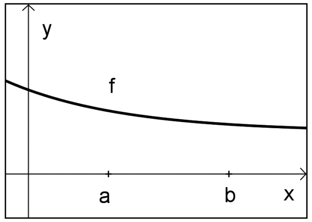
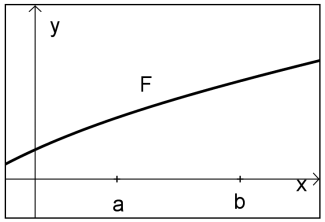
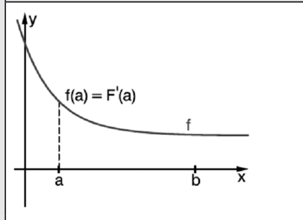
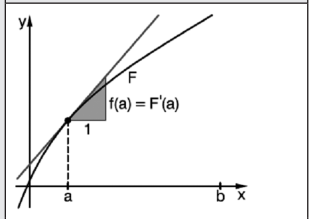
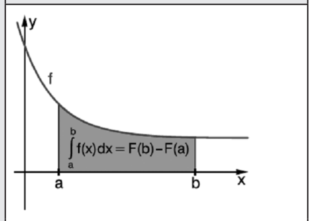
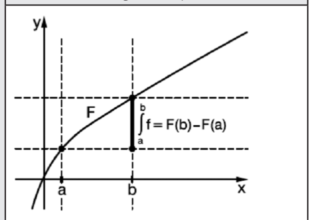
Aufgabe		erwartete Lösungen	operationales Beherrschen entsprechender Verfahren	Grundvorstellungen aktivieren, Fehlvorstellungen vermeiden	Wechsel zwischen üblichen Repräsentationsformen durchführen	typische Anwendungen in inner- und außermathematischen Kontexten
2.5	Ordnen Sie die Integrale der Größe nach. Begründen Sie ohne Rechnung mittels Skizzen: (a) $\int_{-2}^{1} x^3dx$ (b) $\int_{1}^{2} x^3dx$ (c) $\int_{-2}^{2} x^3dx$	(a) < 0, denn  (b) > 0, denn  (c) = 0, denn  also ist (a) < (b) < (c)		Hier wird mit einer möglichen Nichtberücksichtigung der Orientierung von Teilflächen eine gängige Fehlvorstellung aufgegriffen	Es müssen die symbolischen Repräsentationen der gegebenen Integrale graphisch veranschaulicht werden	

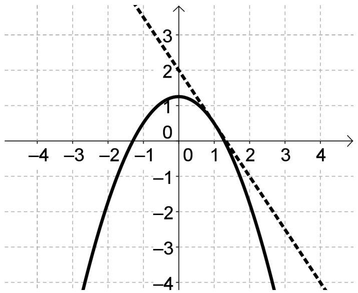
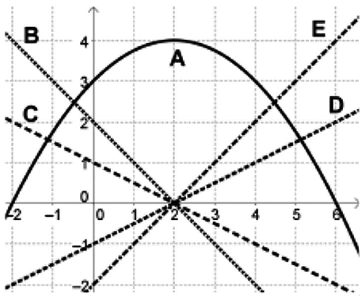
<table>
<tr><th colspan="2">Aufgabe</th><th>erwartete Lösungen</th><th>operationales Beherrschen entsprechender Verfahren</th><th>Grundvorstellungen aktivieren, Fehlvorstellungen vermeiden</th><th>Wechsel zwischen üblichen Repräsentationsformen durchführen</th><th>typische Anwendungen in inner- und außermathematischen Kontexten</th></tr>
<tr><td>2.6</td><td>


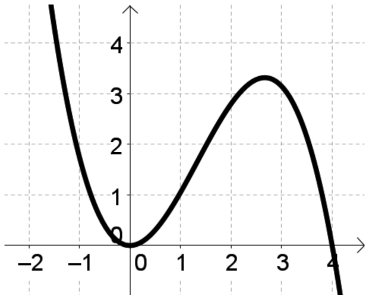
(a) Geben Sie jeweils Intervalle [a;b] mit –2 < a < 0 und 0 < b < 2 so an, dass für f gilt:
(1) $\int_a^b f(x)dx > 0$ (2) $\int_a^b f(x)dx = 0$ (3) $\int_a^b f(x)dx < 0$
(b) Formulieren Sie allgemeine Bedingungen für a und b in (a).</td>
<td>(a) z.B. für (1) $a = -2; \quad b = 1$,
für (2) $a = -1; \quad b = 1$ und
für (3) $a = -1; \quad b = 2$

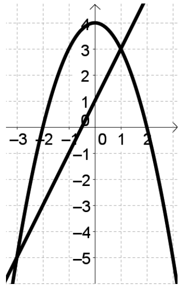
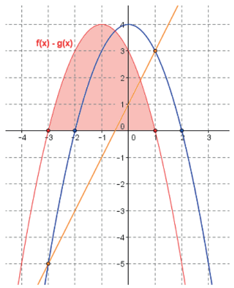
(b) Zu (1): a muss vom Betrag her größer als b sein. Zu (2): a=b.
Zu (3): a muss vom Betrag her kleiner als b sein.</td>
<td>im Vergleich zur vorangegangenen Aufgabe 2.5 eine Aufgabe mit Zielumkehr</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.7</td><td>


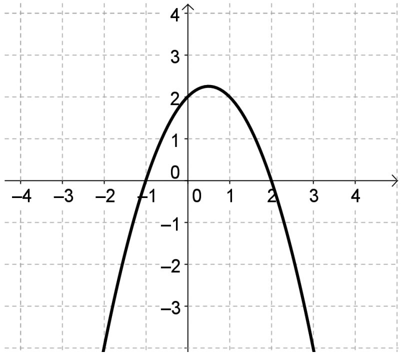
Ordnen Sie der Größe nach.
$\int_a^a f(t)dt$, $\int_a^c f(t)dt$, $\int_a^d f(t)dt$, 0, $\int_c^d f(t)dt$
(aus: Neue Wege 2010)</td>
<td>$\int_c^d f(t)dt$
$< \int_a^a f(t)dt \;= 0$
$< \int_a^d f(t)dt$
$< \int_a^c f(t)dt$</td>
<td></td><td></td><td>Die symbolischen Repräsentationen der Integrale müssen auf den Graphen bezogen werden.</td><td></td></tr>
</table>

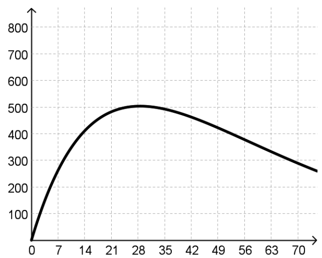
Aufgabe		erwartete Lösungen	operationales Beherrschen entsprechender Verfahren	Grundvorstellungen aktivieren, Fehlvorstellungen vermeiden	Wechsel zwischen üblichen Repräsentationsformen durchführen	typische Anwendungen in inner- und außermathematischen Kontexten
2.8	Abgebildet sind zwei Funktionen f und F, wobei F' = f ist.  Veranschaulichen Sie jeden der folgenden Ausdrücke in beiden Diagrammen. (1) $f(a)$ (2) $\int_a^b f(x)dx$ (3) $F'(a)$ (4) $F(b) - F(a)$ *(aus: Neue Wege 2010)*	(1) und (3) Veranschaulichung am Graphen von f  Der Term steht für den Wert der Funktion f an der Stelle a. Veranschaulichung am Graphen von F  Der Term steht für die Steigung der Funktion F an der Stelle a. (2) und (4) Veranschaulichung am Graphen von f  Der Term steht für den orientierten Flächeninhalt zwischen f und der x-Achse in (a; b). Veranschaulichung am Graphen von F  Der Term steht für den Zuwachs von F in (a; b).			Gegeben sind einige für die Integral- und Differenzialrechnung zentrale Terme, die graphisch zu veranschaulichen sind.	

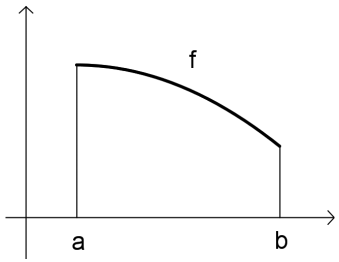
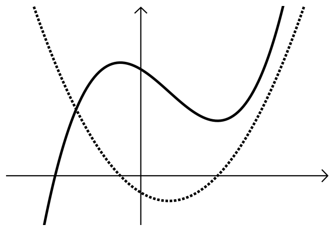
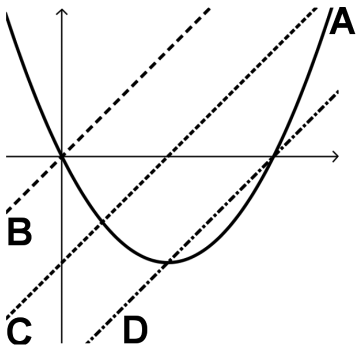
	Aufgabe	erwartete Lösungen	operationales Beherrschen entsprechender Verfahren	Grund-vorstellungen aktivieren, Fehlvorstellungen vermeiden	Wechsel zwischen üblichen Repräsentationsformen durchführen	typische Anwendungen in inner- und außermathematischen Kontexten
3.	**Änderungsraten und Tangentensteigungen sowie Bestände und Flächeninhalte numerisch, graphisch bzw. algebraisch bestimmen**					
3.1	Es ist der Graph einer Funktion f:IR → IR gegeben und seine Tangente an der Stelle x=1.  (a) Geben Sie die Steigung der Tangente an. (b) Ermitteln Sie mindestens drei Werte von f'.	(a) Die Steigung der abgebildeten Tangente beträgt -1,5. (b) Die Steigungen weiterer gedachter Tangenten liefern f'(0)=0, f'(-1)=1,5, f'(-2)≈3	das Verfahren des graphischen Bestimmung einer Geradensteigung als Grundaufgabe	Interpretation der Ableitung als Tangentensteigung	Angabe von Ableitungswerten auf Basis gegebener graphischer Informationen	
3.2	Gegeben sind die Funktion f:IR → IR mit $f(x) = \frac{x^2}{5}$. Ermitteln Sie die Steigung der Tangente in P(2,5; f(2,5)).	f'(2,5) = 1	das Verfahren des symbolischen Ableitens als Grundaufgabe	Interpretation der Ableitung als Tangentensteigung		
3.3	Hugo und Hanna bearbeiten die folgende Aufgabe: A zeigt den Graphen einer quadratischen Funktion f. Geben Sie an, welche Gerade B, C, D oder E den Graphen von f' zeigt:  (a) Hugo will B oder C wählen. Welche Gründe könnte er anführen? (b) Hanna entscheidet sich für C. Warum hat sie Recht?	(a) Vermutlich weiß er, dass zu einer unten geöffneten Parabel eine fallende Gerade als „Ableitungsfunktion" gehört. (b) Hanna hat deshalb Recht, weil die graphische Ableitung an der Stelle 0 den Wert 1 ergibt. Dieser ist aber der y-Achsenabschnitt der Gerade C.		Eine undifferenzierte Vorstellung von der Ableitung einer quadratischen Funktion als lineare Funktion reicht nicht aus. Man muss eine geeignete graphische Ableitung an einer Stelle durchführen.		

Aufgabe		erwartete Lösungen	operationales Beherrschen entsprechender Verfahren	Grund-vorstellungen aktivieren, Fehlvorstellungen vermeiden	Wechsel zwischen üblichen Repräsentationsformen durchführen	typische Anwendungen in inner- und außermathematischen Kontexten
3.4	Abgebildet ist der Graph G_f einer Funktion f:IR → IR :  Geben Sie die Grenzen zweier Intervalle an, über die die von G_f und der x-Achse eingeschlossene Fläche jeweils ungefähr den Wert 2 annimmt.	Durch Abschätzen der Fläche mittels der Kästchen erhält man z.B. [1;2] oder [3;4].	Das Verfahren der graphischen Bestimmung eines krummlinig begrenzten Flächeninhalts als Umkehraufgabe			

Aufgabe		erwartete Lösungen	operationales Beherrschen entsprechender Verfahren	Grund-vorstellungen aktivieren, Fehlvorstellungen vermeiden	Wechsel zwischen üblichen Repräsentationsformen durchführen	typische Anwendungen in inner- und außermathematischen Kontexten
3.5	Gegeben sind die Funktionen f:IR → IR und g:IR → IR mit den Gleichungen f(x) = -x^2 + 4 und g(x) = 2x + 1. (a) Skizzieren Sie die Graphen von f und g. (b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt. (c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen von f und g eingeschlossen wird. (d) Begründen Sie graphisch, dass die Flächen aus (b) und (c) gleich groß sind.	(a)  (b) $\int_{-2}^{2} f(x)dx \approx 10{,}67$ (c) $\int_{-3}^{1} f(x) - g(x)\, dx \approx 10{,}67$. Zuvor werden die Integralgrenzen durch eine Schnittpunktsberechnung mit dem Ansatz f(x) = g(x) ermittelt. (d) Der Graph von f(x) – g(x) zeigt den um 1 nach links verschobenen Graphen von f:  Es zeigt sich nun auch graphisch, dass die in (c) als Lösungen der Gleichung f(x) = g(x) berechneten Integralgrenzen die Nullstellen der Funktion f(x) – g(x) sind.	Insb. (a) und (c) fordert Kenntnisse in Gleichungslöseverfahren aus der Sek I. (b) und (c) enthält Grundaufgaben zur Integralberechnung		In (a) muss ein Funktionsgraph auf Basis einer Gleichung erstellt werden. In (d) ist der algebraischen Lösung eine graphische Begründung beizufügen, die Details der algebraischen Lösung graphisch interpretiert.	

	Aufgabe	erwartete Lösungen	operationales Beherrschen entsprechender Verfahren	Grund-vorstellungen aktivieren, Fehlvorstellungen vermeiden	Wechsel zwischen üblichen Repräsentationsformen durchführen	typische Anwendungen in inner- und außermathematischen Kontexten
3.6	Gegeben sei eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = -x^2 + x + 2$  (a) Enscheide graphisch: $f'(0) = \ldots$ (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 (b) Entscheide graphisch: $f'(2) = \ldots$ (A) -3 (B) -1 (C) 0 (D) 2 (c) Hanni gibt für den Inhalt der zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall [-1;3] eingeschlossenen Fläche den Wert 6 Flächeneinheiten an. Überprüfen Sie die Lösung graphisch. Kann das in etwa stimmen? (d) Nanni berechnet den Flächeninhalt aus (c) mittels des Integrals $\int_{-1}^{3} f(x)dx$ und kommt auf den Wert 8/3. Wie kommt die Differenz zum graphisch ermittelten Wert aus (c) zustande?	Hier werden Fehlvorstellungen bzgl. x-Wert, y-Wert und Steigung überprüft. Die Entscheidung kann durch geeignetes Anlegen eines Geodreiecks gefällt werden. (a) 1 (b) -3 (c) Ein Abzählen der Kästchen ergibt einen Wert bei 6. (d) 8/3 ist der Wert des Integrals, aber nicht des Flächeninhalts. Weil sich der Flächeninhalt aus zwei gegensätzlich orientierten Teilflächen zusammensetzt, ergibt sich hierfür der Wert $\int_{-1}^{2} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx = 19/3 \approx 6{,}3$, der den graphisch ermittelten Flächeninhalt aus (c) bestätigt.		In den Teilaufgaben (a) und (b) finden sich typische Verwechslungen von x-Wert, y-Wert und Steigung. In den Teilaufgaben (c) und (d) wird die unreflektierte Identifikation von Integralwert und Flächeninhalt thematisiert.		

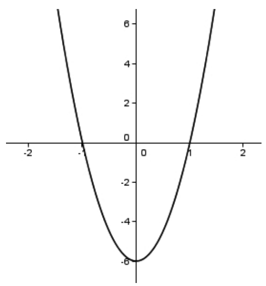
<table>
<tr><th colspan="2">Aufgabe</th><th>erwartete Lösungen</th><th>operationales Beherrschen entsprechender Verfahren</th><th>Grundvorstellungen aktivieren, Fehlvorstellungen vermeiden</th><th>Wechsel zwischen üblichen Repräsentationsformen durchführen</th><th>typische Anwendungen in inner- und außermathematischen Kontexten</th></tr>
<tr><td colspan="7">4. Änderungsraten und rekonstruierte Bestände in Form von Ableitungs- und Integralfunktionen funktional beschreiben und interpretieren</td></tr>
<tr><td>4.1</td><td>Die Funktionen f beziehungsweise f‘ beschreiben jeweils bestimmte Situationen. Fülle die Lücken in der Tabelle so, dass es sinnvoll passt:
<table>
<tr><td>f(x)</td><td>f‘(x)</td></tr>
<tr><td>der von einem Wagen zu einem Zeitpunkt x zurückgelegte Weg</td><td></td></tr>
<tr><td>die Anzahl der zu einem Zeitpunkt x lebenden Menschen in einem Land</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>die in einer Wasserleitung zu einem Zeitpunkt x gemessene Durchflussgeschwindigkeit</td></tr>
<tr><td>der zum einem Streckenpunkt x angegebene Tankinhalt eines PKWs</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>die zu einem Streckenpunkt x angegebene Steigung eines Wanderwegs</td></tr>
</table></td><td>Sinnvolle Interpretationen sind (von oben):
• die Geschwindigkeit des Wagens zum angegebenen Zeitpunkt
• die Wachstumsrate der Landsbevölkerung zum angegebenen Zeitpunkt
• die bis zum angegebenen Zeitpunkt durch die Leitung geflossene Wassermenge
• der zum angegebenen Streckenpunkt momentane Kraftstoffverbrauch
• die am Streckenpunkt erreichte Höhe</td><td></td><td>Deutung der Ableitungsfunktion als Änderungsrate</td><td></td><td>Die Deutung erfolgt in typischen Kontexten</td></tr>
<tr><td>4.2</td><td>Die Graphik zeigt die täglichen Besucherzahlen eines Zoos in den ersten 70 Tagen. Skizzieren Sie einen Graphen, der zu jedem Tag die Gesamtzahl der bisherigen Besucher zeigt.

</td><td>Richtig ist ein monoton steigender Graph, der mit einer Linkskurve beginnt und an der Stelle 28 in eine Rechtskurve übergeht.</td><td></td><td>Hier ist eine Bestandsrekonstruktion graphisch umzusetzen</td><td></td><td></td></tr>
</table>

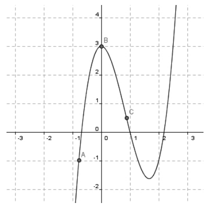
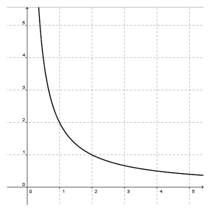
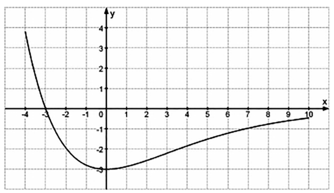
Aufgabe		erwartete Lösungen	operationales Beherrschen entsprechender Verfahren	Grundvorstellungen aktivieren, Fehlvorstellungen vermeiden	Wechsel zwischen üblichen Repräsentationsformen durchführen	typische Anwendungen in inner- und außermathematischen Kontexten
4.3	f:IR → IR sei wie abgebildet auf [a,b] monoton fallend. Dann ist $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ auf [a;b] (A) monoton fallend (B) konstant (C) monoton steigend 	(C) ist richtig		Die Grundvorstellung des Integrals als Flächeninhalt ist mit einer variablen rechten Grenze zu kombinieren. Gleichzeitig wird die Fehlvorstellung aufgegriffen, dass sich Monotonieeigenschaften von f auf F übertragen lassen.	Die Monotonieeigenschaft von F ist durch Betrachtung des Graphen zu ermitteln	
4.4	Skizzieren Sie den Graphen einer ganzrationalen Funktion, für die gilt: Ihre erste Ableitungsfunktion hat zwei Nullstellen, und ihre zweite Ableitungsfunktion ist an diesen Stellen von Null verschieden.		Eine „Umkehraufgabe“ der üblichen graphischen Ableitung		Es erfolgt ein Übersetzen der in Worten formulierten Funktionseigenschaften in eine graphische Darstellung.	
4.5	Benennen Sie alle Geraden B, C oder D, die den Graphen der Ableitungsfunktion der Funktion A zeigen, und begründen Sie Ihre Auswahl. 	Richtig ist der Graph C, denn A weist in seinem Extrempunkt eine Steigung von Null auf. Nur C hat an dieser Stelle den Wert Null.		Die beiden Distraktoren greifen die Fehlvorstellung auf, dass man vom Funktionswert $f(x_0)$ auf den Wert der Ableitung an derselben Stelle $f'(x_0)$ schließen könne.		

Aufgabe		erwartete Lösungen	operationales Beherrschen entsprechender Verfahren	Grundvorstellungen aktivieren, Fehlvorstellungen vermeiden	Wechsel zwischen üblichen Repräsentationsformen durchführen	typische Anwendungen in inner- und außermathematischen Kontexten
5.	**Zur algebraischen Bestimmung von Ableitungsfunktionen die Faktor-, Summen- und Produktregel nutzen (die Kettenregel nur in einfachsten Fällen)**					
5.1	Bestimmen Sie jeweils die Ableitungsfunktion f': (a) $f(x) = 10 \cdot x^2$ (b) $f(x) = 2 \cdot x^6 + 3$ (c) $f(x) = x^2 \cdot (x^3 + 5)$ (d) $f(x) = (3 \cdot x^2 - 7)^9$	(a) $f'(x) = 20 \cdot x$ (b) $f'(x) = 12 \cdot x^5$ (c) $f'(x) = 5 \cdot x^4 + 10 \cdot x$ (d) $f'(x) = 54 \cdot x \cdot (3 \cdot x^2 - 7)^8$	Eine Grundaufgabe zur Bestimmung von Ableitungsfunktionen			
5.2	Ergänzen Sie die Lücken in folgender Tabelle: $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline f(x) & \frac{1}{x^2} & & e^x & & \sin(x) & \\ \hline f'(x) & & \frac{1}{x^2} & & e^x & & \sin(x) \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline f(x) & \frac{1}{x^2} & \frac{-1}{x} & e^x & e^x & \sin(x) & -\cos(x) \\ \hline f'(x) & \frac{-2}{x^2} & \frac{1}{x^2} & e^x & e^x & \cos(x) & \sin(x) \\ \hline \end{array}$	Eine Mischung aus Grund- und Umkehraufgaben bei gleichen Ausgangstermen			
5.3	Bestimmen Sie die Ableitungen f' der Funktionen f und notieren Sie jeweils die verwendeten Ableitungsregeln. (a) $f(x) = x \cdot e^{2 \cdot x}$ (b) $f(x) = 3 \cdot x^n - x$, $n \in \mathbb{N}$ (c) $f(x) = 3 \cdot a \cdot x^3$	(a) $f'(x) = 1 \cdot e^{2 \cdot x} + x \cdot 2 \cdot e^{2 \cdot x}$ $= (1 + 2x) \cdot e^{2 \cdot x}$ (Produktregel, Kettenregel) *Anm.: die Zusammenfassung in der zweiten Zeile ist optional* (b) $f'(x) = 3 \cdot n^{n-1} - 1$ (Faktorregel, Summenregel) (c) $f'(x) = 9 \cdot a \cdot x^2$ (Faktorregel)	Grundaufgaben mit höherem Komplexitätsgrad			
5.4	Wie viele Extremstellen kann eine Funktion f mit $f(x) = x^4 - 3 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 1$ maximal haben? Begründen Sie Ihre Antwort.	Die Funktion kann maximal drei Extremstellen haben, da sie vom Grad 4 ist und demnach höchstens vier Nullstellen aufweist, zwischen denen höchstens drei Extremstellen liegen.		Die Grundvorstellung, dass f' über das Monotonieverhalten einer Funktion Auskunft gibt, muss hier genutzt werden.		

	Aufgabe	erwartete Lösungen	operationales Beherrschen entsprechender Verfahren	Grundvorstellungen aktivieren, Fehlvorstellungen vermeiden	Wechsel zwischen üblichen Repräsentationsformen durchführen	typische Anwendungen in inner- und außermathematischen Kontexten
5.5	Bestimmen Sie jeweils die Ableitung der Funktion f mit $f(t) = 2 \cdot a \cdot t^2$ bzw. $f(a) = 2 \cdot a \cdot t^2$.	$f'(t) = 4 \cdot a \cdot t$ bzw. $f'(a) = 2 \cdot a$.		Der häufige Fehler, dass die Ableitungsvariable nicht beachtet wird, ist hier angesprochen.		

	Aufgabe	erwartete Lösungen	operationales Beherrschen entsprechender Verfahren	Grundvorstellungen aktivieren, Fehlvorstellungen vermeiden	Wechsel zwischen üblichen Repräsentationsformen durchführen	typische Anwendungen in inner- und außermathematischen Kontexten
6. Zur algebraischen Bestimmung von Stammfunktionen die Faktor- und Summenregel nutzen						
6.1	Geben Sie jeweils eine Stammfunktion an: (a) $f(x) = 5 \cdot x^7$ (b) $f(x) = x^4 + x^2$ (c) $f(x) = 2 \cdot e^{-2 \cdot x}$ (d) $f(x) = x \cdot (x^4 - 2 \cdot x)$ Begründen Sie hier, warum man den Funktionsterm zuvor umformen sollte.	(a) Zum Beispiel $F(x) = \frac{5}{8}x^8 + 1$ (b) Zum Beispiel $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3$ (c) Zum Beispiel $F(x) = -e^{-2 \cdot x} - 2$ (d) Zum Beispiel $F(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{2}{3}x^3$ Erst die Umformung des Produktterms in einen Summenterm gestattet die Anwendung der Summenregel der Integration.	Eine Grundaufgabe zur Bestimmung von Stammfunktion			
6.2	Geben Sie zwei verschiedene Stammfunktionen zu f mit $f(x) = x^2$ an.	Zum Beispiel $F_1(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ und $F_2(x) = \frac{x^3}{3} - 1$		Es wird der Fehlvorstellung begegnet, dass es zu einer Funktion maximal nur eine Stammfunktion geben könne.		
6.3	Es sei f eine in IR definierte Funktion mit der Ableitungsfunktion f'. Prüfen Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen richtig sind. Erläutern Sie Ihre jeweilige Entscheidung durch ein Beispiel bzw. ein Gegenbeispiel. (a) Zur Funktion f gehört genau eine Ableitungsfunktion, jedoch mehrere Stammfunktionen. (b) Sind F und G Stammfunktionen von f, so ist auch F+G Stammfunktion von f. (c) Ist F Stammfunktion von f, so gilt $f'(x) = F(x)$. (d) Stammfunktionen einer Funktion f unterscheiden sich nur um eine additive Konstante. *(aus: cosh 2013)*	(a) Ja: Zu $f(x) = x^2$ ist $f'(x) = 2 \cdot x$ die einzige Ableitungsfunktion, aber z. B. $F(x) = \frac{1}{2}x^3$ und $G(x) = \frac{1}{2}x^3 + 1$ sind zwei verschiedene Stammfunktionen. (b) Nein: Im Beispiel zu (a) sind F und G zwei Stammfunktionen von f, aber $(F+G)(x) = x^3 + 1$ ist keine Stammfunktion von f. (c) Nein: Im Beispiel zu (a) ist deutlich, dass $f' \neq F$ ist. (d) Ja: Zum Beispiel ist in (a) jede andere Funktion $H(x) = \frac{1}{2}x^3 + c$ Stammfunktion von f.		Hier sind verschiedene mögliche Missverständnisse über Zusammenhänge zwischen F, f und f' angesprochen.		

Nr.	Aufgabe	erwartete Lösungen	operationales Beherrschen entsprechender Verfahren	Grundvorstellungen aktivieren, Fehlvorstellungen vermeiden	Wechsel zwischen üblichen Repräsentationsformen durchführen	typische Anwendungen in inner- und außermathematischen Kontexten
7. Monotonieeigenschaften und insb. Extrema von Funktionen bestimmen						
7.1	Bestimmen Sie die Extrempunkte des Graphen der Funktion f mit $f(x) = 2x^3 - 6x$.	Die Nullstellen von $f'(x) = 6x^2 - 6$ lassen sich schnell als $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ bestimmen. Mit $f''(x) = 12x$ ergeben sich $f''(1) = 12$ und $f''(-1) = -12$, so dass beide Werte x_1 und x_2 als Extremstellen identifiziert sind. Mit $f(1) = -4$ und $f(-1) = 4$ sind die Koordinaten vollständig: $(-1;4)$ ist Hochpunkt, und $(1;-4)$ ist Tiefpunkt des Graphen.	Eine Grundaufgabe bei der Untersuchung von Funktionseigenschaften			Eine innermathematische Anwendung der Ableitungen zur Bestimmung von Extremwerten
7.2	Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion f an, für die gilt: f hat bei x_0 kein Maximum und es gilt $f'(x_0) = 0$. Begründen Sie anhand einer Skizze.	Ein Beispiel ist etwa die Funktion f mit $f(x) = x^3$. Die Skizze zeigt den bekannten s-förmigen Graphen von f, der bei $x_0 = 0$ eine waagerechte Tangente aufweist. Es gilt also $f'(0) = 0$. Allerdings liegt hier offensichtlich keine Extremstelle vor.	Eine Aufgabe mit Zielumkehr	Hier ist die Fehlvorstellung angesprochen,dass die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremwertes auch hinreichend sei.		
7.3	Bestimmen Sie die Bereiche, in denen der Graph von $f(x) = 2x^3 - 6x$ monoton fallend ist.	Ein algebraischer Lösungsweg ist nicht nötig. Der Graph von f' mit $f'(x) = 6x^2 - 6$ gibt unmittelbar Auskunft über besondere Monotonieabschnitte:  f fällt monoton zwischen -1 und 1.	Eine Grundaufgabe bei der Untersuchung von Funktionseigenschaften		Eine graphische Analyse der Situation führt zur Lösung	Eine innermathematische Anwendung der Ableitung zur Bestimmung von Monotonieeigenschaften

	Aufgabe	erwartete Lösungen	operationales Beherrschen entsprechender Verfahren	Grundvorstellungen aktivieren, Fehlvorstellungen vermeiden	Wechsel zwischen üblichen Repräsentationsformen durchführen	typische Anwendungen in inner- und außermathematischen Kontexten
7.4	Begründen Sie, dass der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^3+3x-1$ genau eine Nullstelle hat.	Ein Lösungsverfahren zur Nullstellenbestimmung von Polynomen dritten Grades kann nicht vorausgesetzt werden, deshalb wird eine graphische Betrachtung der Gleichungen $x^3-1 = 3x$ bzw. $x^3 = 1-3x$ erwartet oder eine Analyse der ersten Ableitung $f'(x) = 3x^2 + 3$, aus der hervorgeht, dass f überall streng monoton steigend ist.			Eine graphische Analyse der Situation führt zur Lösung	
7.5	Skizzieren Sie jeweils den Graphen einer Funktion f, für den beim Durchlaufen von links nach rechts gilt: (a) Vom Punkt A bis zum Punkt B ist die Steigung positiv. Im Punkt B ist die Steigung null. Vom Punkt B bis zum Punkt C ist die Steigung negativ. (b) f'(x) wächst, ist aber immer negativ. *(Nach CAliMERO 2007ff., Bd. 9)*	Zum Beispiel (a)  (b) 	Aufgabe mit Zielumkehr	Die Fehlvorstellung, dass eine wachsende Steigung immer positiv sein müsse, wird in (b) thematisiert	In Wortform und symbolischer Form gegebene Monotonieeigenschaften sind graphisch darzustellen	
7.6	Die Abbildung zeigt für $-4 \leq x \leq 10$ den Graphen der Ableitungsfunktion h' einer Funktion h.  Entscheiden und begründen Sie, ob gilt: (a) Die Funktion *h* ist streng monoton fallend für $x > -3$. (b) Die Funktion *h* hat an der Stelle –3 ein Minimum. (c) $x = 0$ ist eine Wendestelle von h. *(aus: cosh 2013)*	(a): richtig, denn es ist $h'(x) < 0$ für $x > -3$ (b): falsch, dort liegt ein Maximum vor, denn es ist $h'(-3) = 0$ und $h''(-3) < 0$, oder ohne Verwendung von h'': Bei –3 geht h von einer steigenden Monotonie in eine fallende über. (c): richtig, denn 0 ist Extremstelle von h'.		Zusammenhänge zwischen den Monotonieeigenschaften von h, h' und möglicherweise auch h'' herstellen	Die Bedingungen für das Vorliegen von Extremstellen sind graphisch zu überprüfen.	

Danksagung:

Die Autoren danken für viele konstruktive Hinweise und Diskussionsbeiträge, speziell zur Zusammenstellung der illustrierenden Aufgaben, den weiteren Mitgliedern der Arbeitsgruppe zum Thema „Basiskompetenzen am Ende der Sekundarstufe II“ (Christina Drüke-Noe, Leander Kempen) und den Mitgliedern der Kommission Übergang Schule-Hochschule für ihre substantielle Mitarbeit an den in diesem Papier dargestellten Ideen.

Quellen

CAliMERO (2007 ff.): *Arbeitsmaterialien für den Einsatz von CAS im Mathematikunterricht und Methodische und didaktische Handreichungen.* Hrsg. v. Bruder, R. & Weiskirch, W. Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Zentrum für Lehrerbildung.

cosh (2013): *Mindestanforderungskatalog Mathematik der Hochschulen Baden-Württembergs für ein Studium von MINT- oder Wirtschaftsfächern (WiMINT).* Hrsg. v. Dürrschnabel, K., Klein, H.-D., Niederdrenk-Felgner, C., Dürr, R., Weber, B. & Wurth, R.

Heintz, G., Elschenbroich, H.-J., Laakmann, H., Langlotz, H., Rüsing, M., Schacht, F. & Schmidt, R., Tietz, C. (2015 in press): Werkzeugkompetenzen – Kompetent mit digitalen Werkzeugen Mathematik betreiben. Neuss: MNU-Verlag Seeberger.

Kultusministerkonferenz (2012): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der KMK vom 18.2.2012).

Neue Wege (2010): Mathematik Neue Wege: Analysis. Hrsg. v. Schmidt, G., Körner, H., Lergenmüller, A. Braunschweig: Schroedel.

Neue Wege (2015): Mathematik Neue Wege: Qualifikationsphase NRW/Grundkurs. Hrsg. v. Körner, H., Lergenmüller, A., Schmidt G. & Zacharias, M. Braunschweig: Schroedel.

Pinkernell, G. & Greefrath, G. (2011). Mathematisches Grundwissen an der Schnittstelle Schule-Hochschule. MNU, 64(2), 109–113.

Weinert, E. F. (1996). Psychologie des Lernens und der Instruktion. Göttingen: Hogrefe.