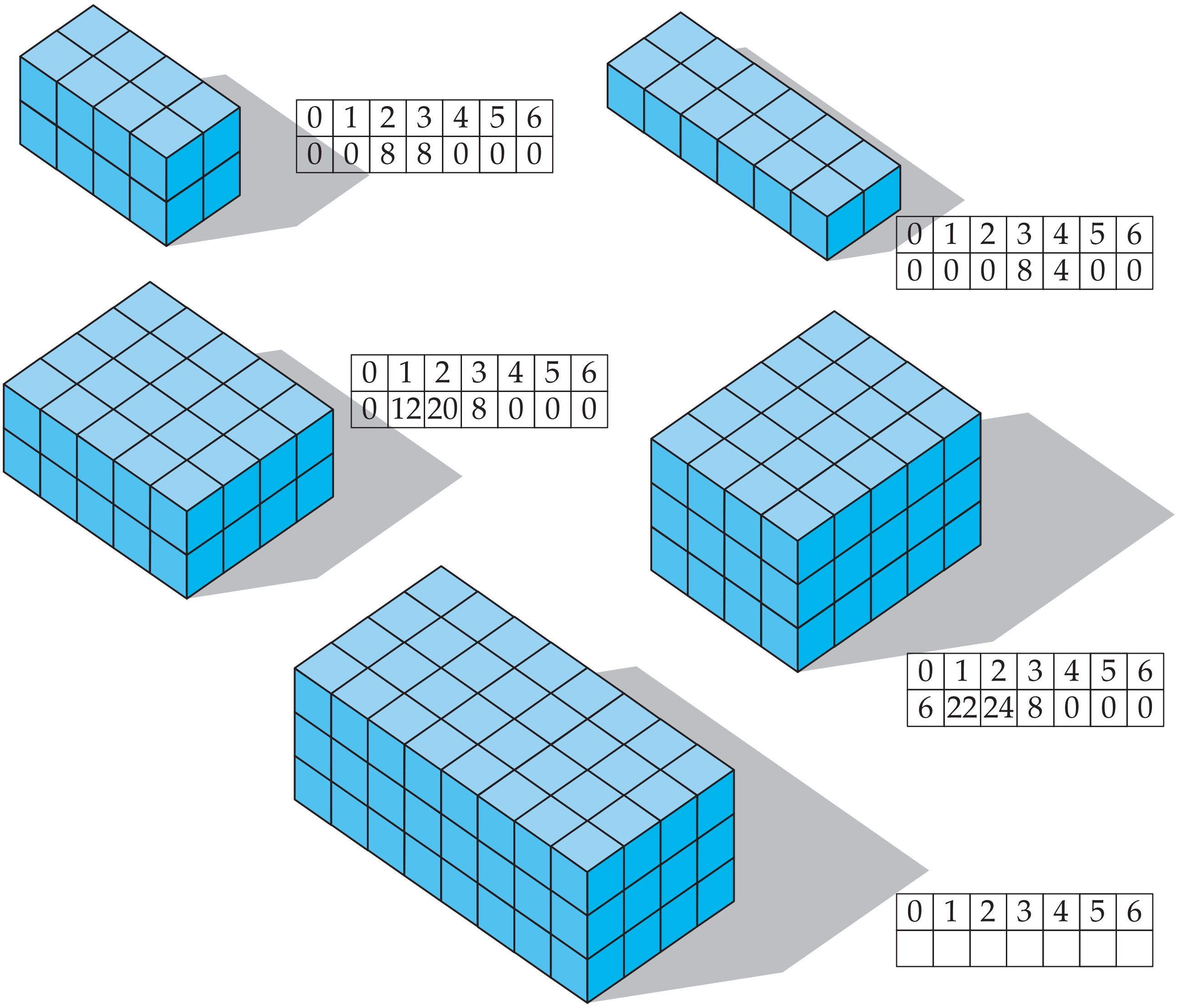
Kennzahlen

Christoph Hormann – Helmut Mallas

Online-Ergänzung

CHRISTOPH HORMANN – HELMUT MALLAS

Kennzahlen



0	1	2	3	4	5	6
0	0	8	8	0	0	0

0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	8	4	0	0

0	1	2	3	4	5	6
0	12	20	8	0	0	0

0	1	2	3	4	5	6
6	22	24	8	0	0	0

0	1	2	3	4	5	6

Aus gleich großen Würfeln werden Quader zusammengesetzt, ihre Oberfläche wird gefärbt. Jeder Quader wird wieder zerlegt, seine Würfel werden betrachtet. Dabei zählt man, wie viele Würfel mit einer bestimmten Eigenschaft der Quader enthält. Die Anzahlen der Würfel mit den Eigenschaften 0 bis 6 werden als Kennzahlen dieses Quaders bezeichnet.

a) Bestimme die Kennzahlen für den fünften Quader und erläutere ihre Bedeutung.

b) Beschreibe oder zeichne Quader mit den Kennzahlen (0, 0, 0, 0, 3, 2, 0), (0, 0, 0, 8, 0, 0, 0), (1, 6, 12, 8, 0, 0, 0) und (24, 52, 36, 8, 0, 0, 0).

c) Erkläre, unter welcher Bedingung die Kennzahlen für die 5 und für die 6 Werte größer als 0 haben und gib mögliche Werte an. Formuliere Regeln für die Kennzahlen eines Quaders.

d) Formuliere Regeln oder Terme, die den Zusammenhang zwischen den Kantenlängen des Quaders und den Kennzahlen beschreiben. Formuliere Terme für den Fall, dass aus den kleinen Würfeln ein großer Würfel zusammengesetzt wird.

Diese Aufgabe entstammt einer Aufgabensammlung der Arbeitsgemeinschaft »Mathema«, die für Schülerinnen und Schüler der Klassen 7 bis 10 in Schleswig-Holstein an Gymnasien und Gemeinschaftsschulen angeboten wird *(http://www.mathema.math.uni-kiel.de)*.

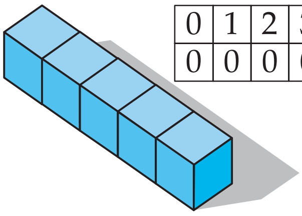
CHRISTOPH HORMANN, fiat-lux@arcor.de

HELMUT MALLAS, Helmutmallas@t-online.de

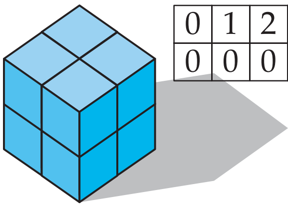
Lösungen

a) Die Kennzahlen des fünften Quaders sind (12, 40, 36, 8, 0, 0, 0). Im Innern des Quaders gibt es 12 Würfel mit null gefärbten Flächen, auf den Flächen des Quaders 40 Würfel mit je einer gefärbten Fläche, an den Kanten des Quaders 36 Würfel mit zwei gefärbten Flächen. Die acht Würfel an den Ecken des Quaders haben je drei gefärbte Flächen. Die Kennzahlen zu 0 bis 6 geben an, aus wie vielen Würfeln mit der entsprechenden Anzahl gefärbter Flächen der Quader besteht.

b) Der Quader mit den Kennzahlen (0, 0, 0, 0, 3, 2, 0) besteht aus einer Reihe von fünf Würfeln. Die beiden Endstücke besitzen fünf gefärbte Flächen, die drei Würfel in der Mitte der Reihe besitzen vier gefärbte Flächen. Das Volumen 5 lässt keine andere Anordnung der Würfel als in einer Reihe zu.



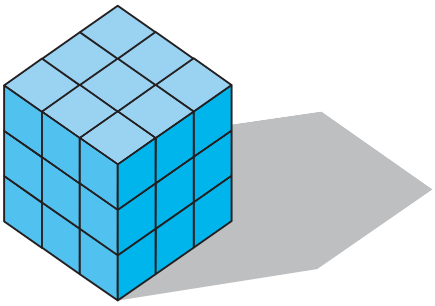
0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	3	2	0



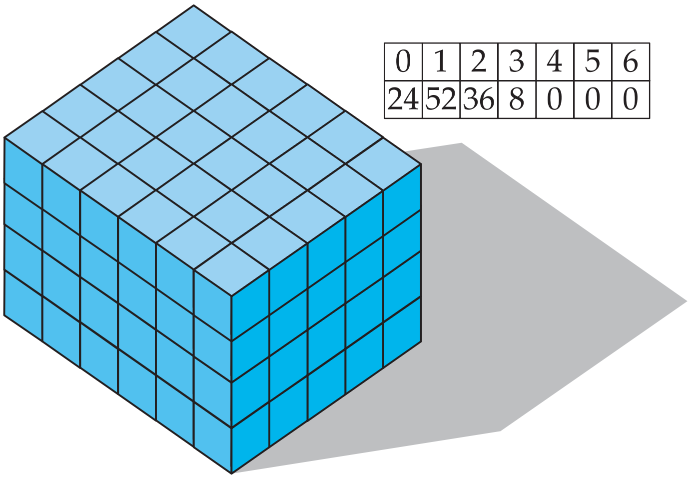
0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	8	0	0

Der Quader mit den Kennzahlen (0, 0, 0, 8, 0, 0, 0) besteht ausschließlich aus Eckwürfeln mit je drei gefärbten Flächen. Der Quader ist ein $2 \times 2 \times 2$-Würfel. Das Volumen 8 ließe sich zwar auch als $1 \times 1 \times 8$ oder als $1 \times 2 \times 4$ darstellen, aber dann mit den Kennzahlen (0, 0, 0, 0, 6, 2, 0) bzw. (0, 0, 0, 4, 4, 0, 0).

Der Quader mit den Kennzahlen (1, 6, 12, 8, 0, 0, 0) ist ein $3 \times 3 \times 3$-Würfel. Er hat im Innern einen Würfel mit null gefärbten Flächen, in jeder der sechs Flächen einen Würfel mit einer gefärbten Fläche, in jeder der zwölf Kanten einen Würfel mit je zwei gefärbten Flächen sowie acht Eckwürfel mit je drei gefärbten Flächen. Das Volumen 27 würde sich sonst nur noch als $1 \times 3 \times 9$ darstellen lassen, hätte aber dann die Kennzahlen (0, 0, 7, 16, 4, 0, 0).



0	1	2	3	4	5	6
1	6	12	8	0	0	0



0	1	2	3	4	5	6
24	52	36	8	0	0	0

Der Quader mit den Kennzahlen (24, 52, 36, 8, 0, 0, 0) hat das Volumen 120 und die Abmessungen $6 \times 5 \times 4$. Er hat acht Eckwürfel mit je drei gefärbten Flächen, in den Kanten $4 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 36$ Würfel mit je zwei gefärbten Flächen, in den Flächen $2 \cdot (2 \cdot 4) + 2 \cdot (2 \cdot 3) + 2 \cdot (3 \cdot 4) = 52$ Würfel mit einer gefärbten Fläche und im Innern $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Würfel mit null gefärbten Flächen. Das Volumen 120 lässt sich auch anders faktorisieren, z. B. $12 \times 5 \times 2$ oder $120 \times 1 \times 1$. Es scheiden aber alle Produkte aus, bei denen einer der Faktoren 2 oder 1 ist, denn in diesen Fällen treten Würfel mit vier und fünf gefärbten Flächen auf. Würfel mit null gefärbten Flächen können nur dann auftreten, wenn alle Kantenlängen größer oder gleich drei sind. Am einfachsten betrachtet man deshalb die Faktorisierung der Anzahl 24 innerer Würfel. Die Kanten des äußeren Quaders müssen um je zwei Würfel länger sein. Nur das Produkt $6 \times 5 \times 4$ ergibt das Volumen 120.

innen	$24 \times 1 \times 1$	$12 \times 2 \times 1$	$8 \times 3 \times 1$	$6 \times 4 \times 1$	$6 \times 2 \times 2$	$4 \times 3 \times 2$
außen	$26 \times 3 \times 3 = 234$	$14 \times 4 \times 3 = 168$	$10 \times 5 \times 3 = 150$	$8 \times 6 \times 3 = 144$	$8 \times 4 \times 4 = 128$	$6 \times 5 \times 4 = 120$

c) Addiert man die Kennzahlen eines Quaders, erhält man sein Volumen.

Sechs gefärbte Flächen können nur im Fall $1 \times 1 \times 1$ auftreten, also bei einem einzelnen Würfel. Diese Kennzahl kann nur die Werte 1 oder 0 haben. Wenn sie den Wert 1 hat, dann müssen alle übrigen Kennzahlen den Wert 0 haben.

Fünf gefärbte Flächen können nur im Fall $a \times 1 \times 1$ auftreten, bei den Endstücken einer einzigen Reihe von Würfeln. Diese Kennzahl kann nur die Werte 0 oder 2 annehmen. Wenn sie den Wert 2 hat, dann gibt es noch $\left(\frac{a}{2}\right)$ Würfel mit vier gefärbten Flächen, alle übrigen Kennzahlen müssen den Wert 0 haben.

Vier gefärbte Flächen können in den beiden Fällen $a\times1\times1$ und $a\times b\times1$ auftreten. Wenn $b=1$ ist, gibt es $\binom{a}{2}$ Würfel mit vier gefärbten Flächen (s.o.). Wenn $b>1$ ist, sind die Würfel in einer einzigen Schicht angeordnet, deren Breite b ist. Dann gibt es genau vier Würfel mit vier gefärbten Flächen, nämlich in den Ecken der Schicht. Die Kennzahlen für 5 und 6 müssen 0 sein, und auch die Kennzahlen für 0 und 1 müssen 0 sein, denn es gibt keinen Würfel, der nicht an mindestens zwei Flächen des Quaders sichtbar ist. Es gibt Zweier in den Flächen, Dreier in den Kanten und Vierer in den Ecken des Quaders.

Drei gefärbte Flächen können in den Fällen $a\times b\times1$ und $a\times b\times c$ auftreten. Wenn $c=1$ ist, also bei einer einzigen Schicht von Würfeln, befinden sich die Dreier in den Kanten des Quaders, deren Länge größer als 2 ist. Der Wert muss gerade sein, weil die Schicht je zwei gleich lange Kanten hat.
Wenn $c=1$ ist, befinden sich die Dreier in den Ecken des Quaders. In diesem Fall kann nur der Wert 8 auftreten.

Zwei gefärbte Flächen können in den Fällen $a\times b\times1$ und $a\times b\times c$ auftreten. Wenn ist, also bei einer einzigen Schicht von Würfeln, befinden sich die Zweier in den Flächen des Quaders, was nur bei einer Kantenlänge größer als 2 möglich ist. Wenn $c=1$ ist, befinden sich die Zweier in den Kanten des Quaders. Weil es je vier gleich lange Kanten gibt, muss der Wert durch 4 teilbar sein.

Eine gefärbte Fläche kann nur auftreten, wenn zwei Kantenlängen größer oder gleich 2 sind und die dritte größer als 2 ist.

Null gefärbte Flächen können nur auftreten, wenn alle Kantenlängen größer oder gleich 3 sind.

d) Wir führen folgende Variablen ein: a, b und c sollen die Kantenlängen des Quaders sein. Die Kennzahlen nennen wir i, f, k, e, v, u und s so wie Inneres, Fläche, Kante, Ecke, vier, fünf und sechs. Wir unterscheiden vier Fälle:

1. Alle Kantenlängen sind größer oder gleich 2.

0	1	2	3	4	5	6
i	***f***	***k***	**8**	0	0	0

mit $i=\binom{a}{2}\cdot\binom{b}{2}\cdot\binom{c}{2}$,
$f=2\cdot\binom{a}{2}\cdot\binom{b}{2}+2\cdot\binom{b}{2}\cdot\binom{c}{2}\cdot\binom{a}{2}\cdot\binom{c}{2}$,
$k=4\cdot\binom{a}{2}+4\cdot\binom{b}{2}+4\cdot\binom{c}{2}$ und $e=8$

2. $c=1$, die anderen Kantenlängen sind größer oder gleich 2 (nur eine Schicht).

0	1	2	3	4	5	6
0	0	***k***	***e***	**4**	0	0

mit $k=\binom{a}{2}\cdot\binom{b}{2}$,
$e=2\cdot\binom{a}{2}\cdot+2\cdot\binom{b}{2}$ und $v=4$

3. $a>1$, $b=1$ und $c=1$ (nur eine Reihe)

0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	***v***	***u***	1

mit $v=\binom{a}{2}$ und $u=4$

4. Alle Kantenlängen gleich 1 (nur ein einzelner Würfel)

0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	**1**

mit $s=1$

0	1	2	3	4	5	6	Volumen
0	0	0	0	0	0	**1**	1
0	**0**	**0**	**8**	0	0	0	8
1	**6**	**12**	**8**	0	0	0	27
8	**24**	**24**	**8**	0	0	0	64
27	**54**	**36**	**8**	0	0	0	125
64	**96**	**48**	**8**	0	0	0	216
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Setzt man einen großen Würfel aus kleinen Würfeln zusammen, d. h. $a=b=c$, ergeben sich die in der Tabelle aufgeführten Kennzahlen. Mit Ausnahme der ersten Zeile, also für $a>1$ ergeben sich die Terme

$i=\binom{a}{2}^3$, $f=6\cdot\binom{a}{2}^2$, $k=12\cdot\binom{a}{2}$ und $e=8$.

Man sieht zwei Zeilen versetzt, also ab der 3. Zeile in der ersten Spalte die Kubikzahlen, in der zweiten Spalte das Sechsfache der Quadratzahlen, in der dritten Spalte die Einmalzwölfreihe sowie in der vierten Spalte lauter Achten.

Anmerkung: Auch für ein Computer-Algebra-System ist die Bestimmung der Kantenlängen aus den Kennzahlen eine durchaus anspruchsvolle Aufgabe. Für das Lösen des Gleichungssystems

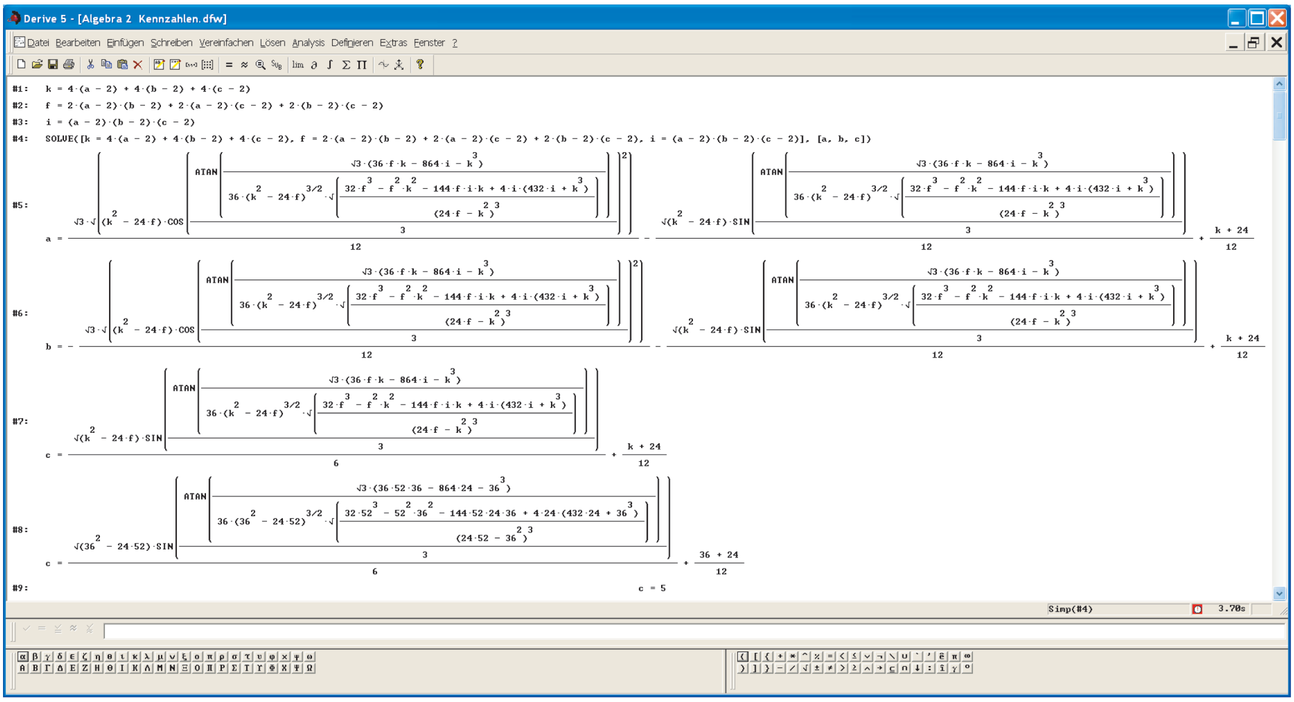
$$i=\binom{a}{2}\cdot\binom{b}{2}\cdot\binom{c}{2}$$

$$f=2\cdot\binom{a}{2}\cdot\binom{b}{2}+2\cdot\binom{b}{2}\cdot\binom{c}{2}+2\cdot\binom{a}{2}\cdot\binom{c}{2}$$

$$k=4\cdot\binom{a}{2}+4\cdot\binom{b}{2}+4\cdot\binom{c}{2}$$

benötigte Derive 3,7 Sekunden, tausendmal länger als bei normalen Berechnungen; andere Programme gaben auf.

Die Lösungsmenge beanspruchte dreimal den gesamten Bildschirm. Die Abbildung zeigt deshalb nicht die gesamte allgemeine Lösung, sondern eine bereits manuell aufgeräumte Bildschirmdarstellung. Derive gibt je drei verschiedene Terme für a, b und c an, die aber beim Einsetzen von Kennzahlen i, f und k die Werte für a, b und c nur in vertauschter Reihenfolge liefern. Drei Zahlen von man auf sechs Arten vertauschen. Von den je sechs allgemeinen Termen für a, b und c hat Derive je drei gefunden.



Diese Aufgabe entstammt einer Aufgabensammlung der Arbeitsgemeinschaft »Mathema«, die für Schülerinnen und Schüler der Klassen 7 bis 10 in Schleswig-Holstein an Gymnasien und Gemeinschaftsschulen angeboten wird *(http://www.mathema.math.uni-kiel.de)*.

CHRISTOPH HORMANN, *fiat-lux@arcor.de*

HELMUT MALLAS, *Helmutmallas@t-online.de*