

Ein Wageproblem

RAINER PIPPIG

Online-Erganzung

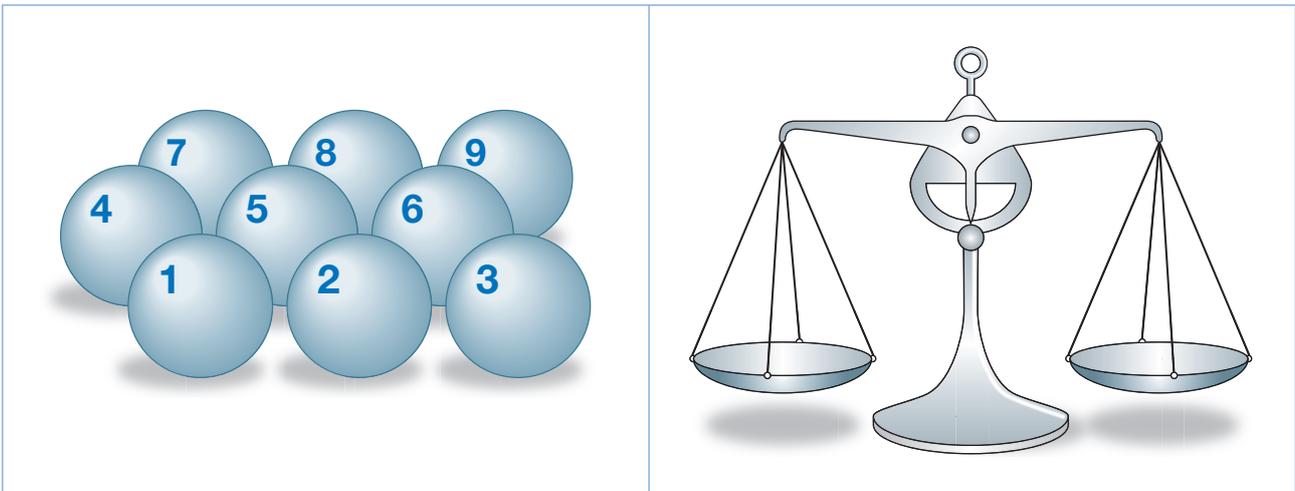
RAINER PIPPIG

Ein Wägeproblem

Denksportaufgaben gehören zu den motivierendsten Aufgabentypen. Viele Schülerinnen und Schüler empfinden sie als geistige Herausforderung und beschäftigen sich gern mit ihnen. Hier wird eine scheinbar einfache Wägaufgabe gestellt. Aus einer Reihe gleich aussehender Kugeln ist eine Kugel mit abweichendem Gewicht herauszufinden. Der Reiz und die Schwierigkeit bestehen darin, dass es unbekannt ist, ob die gesuchte Kugel leichter oder schwerer ist als die anderen. Es beginnt mit einer relativ leichten Fragestellung, deren Lösung mit wachsender Kugelzahl immer schwieriger wird.

Aufgabe:

Du hast 9 gleich aussehende nummerierte Kugeln, von denen eine schwerer oder leichter ist als die 8 anderen. Du weißt aber nicht, ob sie schwerer oder ob sie leichter ist; du weißt nur, dass ihr Gewicht von den anderen 8 Kugeln abweicht.



Diese Kugel sollst du mit Hilfe einer Tafelwaage oder einer Balkenwaage herausfinden und auch entscheiden, ob sie schwerer oder leichter als die anderen ist. Dafür sollst du mit nur drei Wägungen auskommen!

Zusatzfragen:

Kannst du diese Aufgabe auch mit drei Wägungen lösen, wenn noch eine Kugel dazukommt, d. h. wenn eine von 10 gleich aussehenden Kugeln ein anderes Gewicht hat als die restlichen 9?

Finde heraus, bis zu welcher Anzahl du die abweichende Kugel mit drei Wägungen identifizieren kannst.

Weißt Du dann in jedem Fall, ob sie schwerer oder leichter ist als die anderen?

Experimentiervorschlag:

Du kannst dir die Kugeln leicht aus Knetmasse herstellen und in eine der Kugeln einen kleinen Metall- oder einen Styroporkern verstecken. Auch alte Tennis- oder Tischtennisbälle eignen sich gut dazu, wenn man mit einer kleinen Spritze gleich viel Wasser hineinfüllt (bis auf einen).

Die Abweichung im Gewicht der einen Kugel darf natürlich nicht so groß sein, dass man sie schon mit den Händen fühlt.

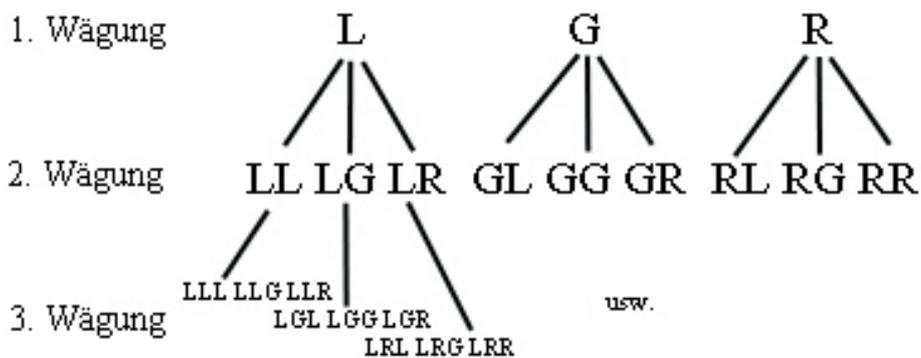
Mögliche Lösungswege sowie Hinweise auf geeignete Lösungsstrategien findet man auf der MNU-Homepage unter www.mnu.de/mnu-zeitschriften/mnu.



Online-Ergänzung

Abkürzungen: L: die linke Seite der Waage ist schwerer
 G: die Waage ist im Gleichgewicht
 R: die rechte Seite der Waage ist schwerer#
 LGL: 1. Wägung L, 2. Wägung G, 3. Wägung L usw.

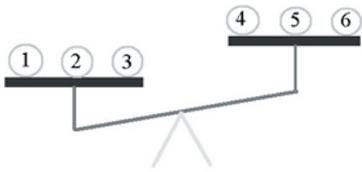
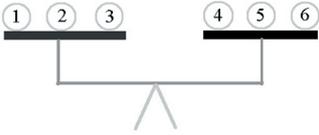
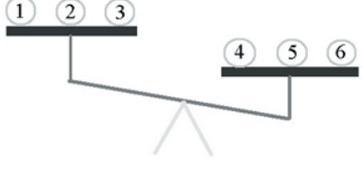
Als Baumdiagramm ergibt sich folgende Übersicht über die möglichen Wägungen. Im Folgenden werden natürlich aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht alle 9 Möglichkeiten der 2. Wägung und nicht alle 27 der 3. Wägung dargestellt, zumal sich dabei sehr viele Überschneidungen mit identischer Logik ergeben.



Mögliche Lösungswege für 9 Kugeln

1. Wägung

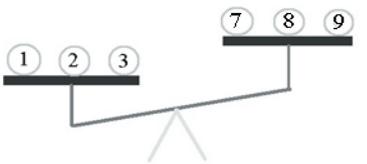
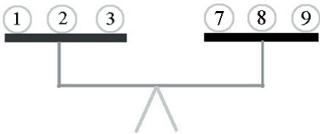
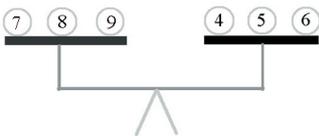
Vermutlich versucht man intuitiv als erstes den folgenden Lösungsansatz: Man legt jeweils drei Kugeln auf die Waagschalen (z.B. 1 bis 6). Das ergibt folgende drei Fälle:

| | | |
|---|--|---|
| L  | G  | R  |
| gesuchte Kugel ist 1, 2 oder 3 und schwerer oder 4, 5 oder 6 und leichter (7, 8, 9 richtiges Gewicht) | gesuchte Kugel ist 7, 8 oder 9 und leichter oder schwerer (1 bis 6 richtiges Gewicht) | gesuchte Kugel ist 1, 2 oder 3 und leichter oder 4, 5 oder 6 und schwerer (7, 8, 9 richtiges Gewicht) |

2. Wägung

Bei so ziemlich allen Aufgaben dieses Typs ist die 2. Wägung die entscheidende. Das Ziel muss sein, die Anzahl der möglichen falschen Kugeln auf möglichst wenige zu begrenzen, damit die 3. Wägung ein eindeutiges Ergebnis liefern kann. Gut ist auch, wenn man schon eine Entscheidung treffen kann, ob das Gewicht der falschen Kugel nach oben oder unten abweicht.

Man vergleicht nun für L oder R die „verdächtigen“ Kugeln mit den drei richtigen 7, 8 und 9. Im Fall G vergleicht man zwei der verdächtigen Kugeln untereinander. Wichtig ist dabei, die Erkenntnisse über die Gewichtsabweichung nach oben oder unten aus der 1. Wägung mitzunehmen. Damit ergeben sich bei diesem Lösungsvorschlag 3x3 Möglichkeiten für die 2. Wägung:

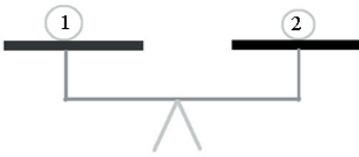
| | | |
|---|---|--|
| <p>LL</p>  | <p>LG</p>  | <p>LR</p> <p>nicht möglich</p> <p>(1, 2 oder 3 wurden bereits als schwerer erkannt)</p> |
| <p>gesuchte Kugel ist 1, 2 oder 3 und schwerer</p> | <p>gesuchte Kugel ist 4, 5 oder 6 und leichter</p> | |
| <p>GL</p>  | <p>GG</p>  | <p>GR</p>  |
| <p>7 ist schwerer oder 8 ist leichter</p> | <p>9 ist die falsche Kugel, (7 und 8 sind richtig)</p> | <p>7 ist leichter oder 8 ist schwerer</p> |
| <p>RR</p>  | <p>RG</p>  | <p>RL</p> <p>nicht möglich</p> <p>(4, 5 oder 6 wurden bereits als schwerer erkannt)</p> |
| <p>gesuchte Kugel ist 4, 5 oder 6 und schwerer</p> | <p>gesuchte Kugel ist 1,2 oder 3 und leichter</p> | |

3. Wägung

Hier muss lediglich noch die falsche Kugel durch einfachen Vergleich von zwei Kugeln herausgefunden werden.

Im Fall GG vergleicht man 9 mit einer richtigen Kugel, um noch zusätzlich die Abweichung nach oben oder unten zu finden. Bei GL und GR vergleicht man 7 mit 9; bei Gleichgewicht ist es 8.

In allen anderen Fällen legt man zwei der drei verdächtigen Kugeln auf jeweils eine Seite der Waage. Hier ein Beispiel:

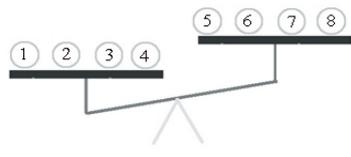
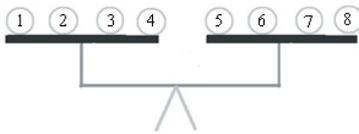
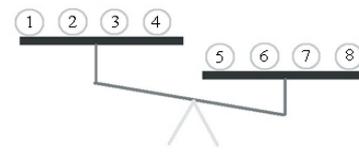
| | | |
|---|---|---|
| LLL | LLG | LLR |
|  |  |  |
| gesuchte Kugel ist 1 und schwerer | gesuchte Kugel ist 3 und schwerer | gesuchte Kugel ist 2 und schwerer |

Nach diesem Schema lässt sich die falsche Kugel auch für alle anderen Fälle finden. Ganz bewusst ist diese Aufgabe mit 9 Kugeln als erstes gestellt worden, denn ihre Lösung war sicherlich nicht allzu schwierig und sie soll Motivation für die folgenden Probleme sein.

Es war aber nur eine von vielen verschiedenen Lösungsmöglichkeiten bei 9 Kugeln.

Ein deutlich anspruchsvollere Alternative, die später noch sehr gute Dienste leisten wird, beginnt mit jeweils 4 Kugeln bei der 1. Wägung.

1. Wägung

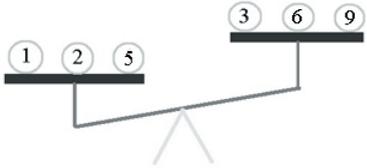
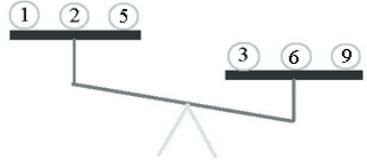
| | | |
|---|---|---|
| L | G | R |
|  |  |  |
| gesuchte Kugel ist 1, 2, 3 oder 4 und schwerer oder 5, 6, 7 oder 8 und leichter (9 richtiges Gewicht) | gesuchte Kugel ist 9 und leichter oder schwerer (1 bis 8 richtiges Gewicht) | gesuchte Kugel ist 1, 2, 3 oder 4 und leichter oder 5, 6, 7 oder 8 und schwerer (9 richtiges Gewicht) |

2. Wägung:

Der Fall G mit der Lösung 9 ist bereits erledigt: im Vergleich mit einer richtigen Kugel weiß man dann auch, ob 9 schwerer oder ob 9 leichter ist als die übrigen Kugeln.

Um auf möglichst nur drei verdächtige Kugeln für die 3. Wägung zu kommen, werden bei Fall L oder R zwei Kugeln auf ihrer Seite belassen (z.B. 1 und 2), zwei Kugeln links und rechts vertauscht (z.B. 3 und 5) und eine der verdächtigen Kugeln (z.B. 7 oder 8) durch die richtige Kugel 9 ersetzt. Die Kugeln 4, 7 und 8 werden also entfernt. Wichtig ist dabei, die Erkenntnisse über die Gewichtsabweichung nach oben oder unten aus der 1. Wägung mitzunehmen.

Damit ergeben sich bei diesem Lösungsvorschlag jeweils 3 Möglichkeiten für die 2. Wägung (1. Zeile der folgenden Tabelle) mit verschiedenen Schlussfolgerungen je nachdem, ob die 1. Wägung L (2. Zeile) oder R (3. Zeile) war.

| | | |
|--|--|--|
|  |  |  |
| <p>LL gesuchte Kugel ist 1 oder 2 und schwerer oder 6 und leichter (die neu hinzugekommenen Kugeln haben nichts verändert)</p> | <p>LG gesuchte Kugel ist 4 und schwerer oder 7 oder 8 und leichter (die falsche Kugel muss sich unter den entfernten befinden)</p> | <p>LR gesuchte Kugel ist 3 und schwerer oder 5 und leichter (die falsche Kugel muss die Seite gewechselt haben)</p> |
| <p>RL gesuchte Kugel ist 3 und leichter oder 5 und schwerer (die falsche Kugel muss die Seite gewechselt haben)</p> | <p>RG gesuchte Kugel ist 4 und leichter oder 7 oder 8 und schwerer (die falsche Kugel muss sich unter den entfernten befinden)</p> | <p>RR gesuchte Kugel ist 1 oder 2 und leichter oder 6 und schwerer (die neu hinzugekommenen Kugeln haben nichts verändert)</p> |

Damit bleiben für die 3. Wägung maximal drei Kugeln übrig, deren Abweichung nach oben oder unten man aber bereits sicher kennt.

3. Wägung:

Im Fall von LR (bzw. RL mit gleicher Logik) vergleicht man eine Kugel, z.B. 3, mit einer richtigen Kugel, z.B. 6:

| | | |
|---|---|---|
| <p>LRL</p>  | <p>LRG</p>  | <p>LRR</p> <p>nicht möglich (da 3 als schwerer erkannt)</p> |
| <p>gesuchte Kugel ist 3 und schwerer</p> | <p>gesuchte Kugel ist 5 und leichter</p> | |

In den vier anderen Fällen legt man die beiden Kugeln mit gleicher Abweichung auf je eine Seite der Waage. Hier ist das Beispiel LG für die Kugeln 7 und 8 gezeichnet:

| | | |
|---|---|---|
| <p>LGL</p>  | <p>LGG</p>  | <p>LGR</p>  |
| <p>gesuchte Kugel ist 8 und leichter</p> | <p>gesuchte Kugel ist 4 und schwerer</p> | <p>gesuchte Kugel ist 7 und leichter</p> |

Damit ist auch mit diesem Lösungsweg die falsche Kugel aus insgesamt 9 Kugeln identifiziert und ihre Abweichung bekannt.

Lösungsvorschlag für mehr als 9 Kugeln

Bei mehr als 9 Kugeln geht man bei der 1. Wägung genau so vor wie in dem 2. Lösungsvorschlag für 9 Kugeln in zwei Viererpacks. Die Lösungsstränge L und R nach der 1. Wägung sind auch bei 10 Kugeln oder mehr identisch. Denn wenn die falsche Kugel schon bei der 1. Wägung auf die Waage zu liegen kommt wie bei L und R, ist es egal, wie viele Kugeln mit richtigem Gewicht noch übrig bleiben. Man muss also nur den Gleichgewichtsfall G neu überdenken, um jetzt aus den übrig gebliebenen Kugeln 9 bis 10, 9 bis 11 usw. die falsche Kugel mit zwei Wägungen herauszufinden.

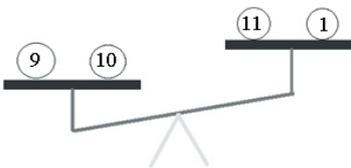
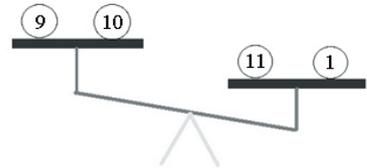
Das Problem reduziert sich somit auf die Fragen:

1. Bis zu wie vielen Kugeln ist es möglich, mit zwei Wägungen die falsche herauszufinden?
2. Und weiß man dann auch, ob sie schwerer oder ob sie leichter ist als die anderen?

Wieder muss also die 2. Wägung so gewählt werden, damit für die 3. Wägung nur maximal drei Kugeln übrig bleiben.

Bei 9 und 10 Kugeln vergleicht man in der 2. Wägung die 9 mit der richtigen Kugel 1 und sieht bei Neigung die Lösung (GGL oder GGR). Bei Gleichgewicht GGG zwischen 9 und 1 vergleicht man in der 3. Wägung die letzte Kugel 10 mit 1 und sieht ebenfalls die Lösung.

Bei 11 oder mehr Kugeln wählt man folgende Anordnung für die 2. Wägung:

| GL | GG | GR |
|---|---|---|
|  |  |  |
| gesuchte Kugel ist 9 oder 10 und schwerer oder 11 und leichter | gesuchte Kugel ist 12 oder 13 usw. und schwerer oder leichter | gesuchte Kugel ist 9 oder 10 und leichter oder 11 und schwerer |

Wie vorhin bei 9 Kugeln legt man bei der 3. Wägung für GL und GR die beiden Kugeln mit gleicher Abweichung auf je eine Seite der Waage. Hier ist das Beispiel GL für die Kugeln 9 und 10 gezeichnet:

| GLL | GLG | GLR |
|---|--|---|
|  | nicht möglich (da eine von beiden schon als schwerer erkannt wurde) |  |
| gesuchte Kugel ist 9 und schwerer | | gesuchte Kugel ist 10 und schwerer |

Bleibt zum Abschluss noch der Fall GG.

Mit einer einzigen Wägung kann man eine falsche Kugel nicht aus vier Kugeln herausfinden, selbst wenn man die Abweichungen aller vier Kugeln kennt. Würde man je eine verdächtige Kugel auf jede Seite der Waage legen, dann blieben dennoch zwei verdächtige übrig; dieses Paar kann man nicht mehr unterscheiden. Legt man zwei der verdächtigen Kugeln auf eine Seite der Waage, so ist dieses Paar nach der Wägung nicht mehr in sich unterscheidbar. Wären also noch drei Kugeln 12, 13 und 14 vorhanden, so könnte man die gesuchte Kugel nicht mehr sicher mit der verbliebenen letzten Wägung herausfinden.

Ansonsten legt man als 3. Wägung 12 und 1 auf beide Seiten und erkennt bei Neigung (GGL oder GGR) die Abweichung. Bei Gleichgewicht GGG von 12 und 1 bleibt nur als Lösung die 13. Kugel. Nur in diesem einzigen Fall GGG weiß man nicht, ob die gesuchte Kugel schwerer oder leichter ist. Die ursprüngliche Fragestellung („Weißt du dann in jedem Fall, ob sie schwerer oder leichter ist?“) ist also bei 13 Kugeln nach diesen Überlegungen in einem einzigen Fall nicht ganz zu erfüllen.

Ergebnis:

Man kann also die falsche Kugel bei bis zu 13 Kugeln herausfinden. Nur in einem einzigen Sonderfall kann man die Abweichung bei 13 Kugeln nicht erkennen, aber die Kugel trotzdem identifizieren.

Ausblick:

Als Ausblick wäre noch geeignet, einen ganz anderen Lösungsansatz zu finden sowie beispielsweise folgende Aufgaben zu stellen:

- Ab welcher Anzahl der Kugeln braucht man zwingend vier Wägungen?
- Kann man mit drei Wägungen auch 2 falsche Kugeln unter 9 Kugeln herausfinden?
- Gibt es noch einen ganz anderen Ansatz, um die falsche aus 14 Kugeln herauszufinden?
- usw.

Der persönlichen Kreativität sind keine Grenzen gesetzt.

Dr. Rainer Pippig, Birkenweg 1, 82061 Neuried, rainer.pippig@t-online.de, arbeitete seit 1976 als Gymnasiallehrer für Physik, als Ausbilder für Referendare am Lehrstuhl für Didaktik der Physik an der Ludwig-Maximilians-Universität München (wo er auch promoviert hat), als Seminarlehrer für Physik am Wittelsbacher-Gymnasium in München sowie als Schulleiter des Gymnasiums Oberhaching.