Yin und Yang

Heinz Klaus Strick

Online-Ergänzung

HEINZ KLAUS STRICK

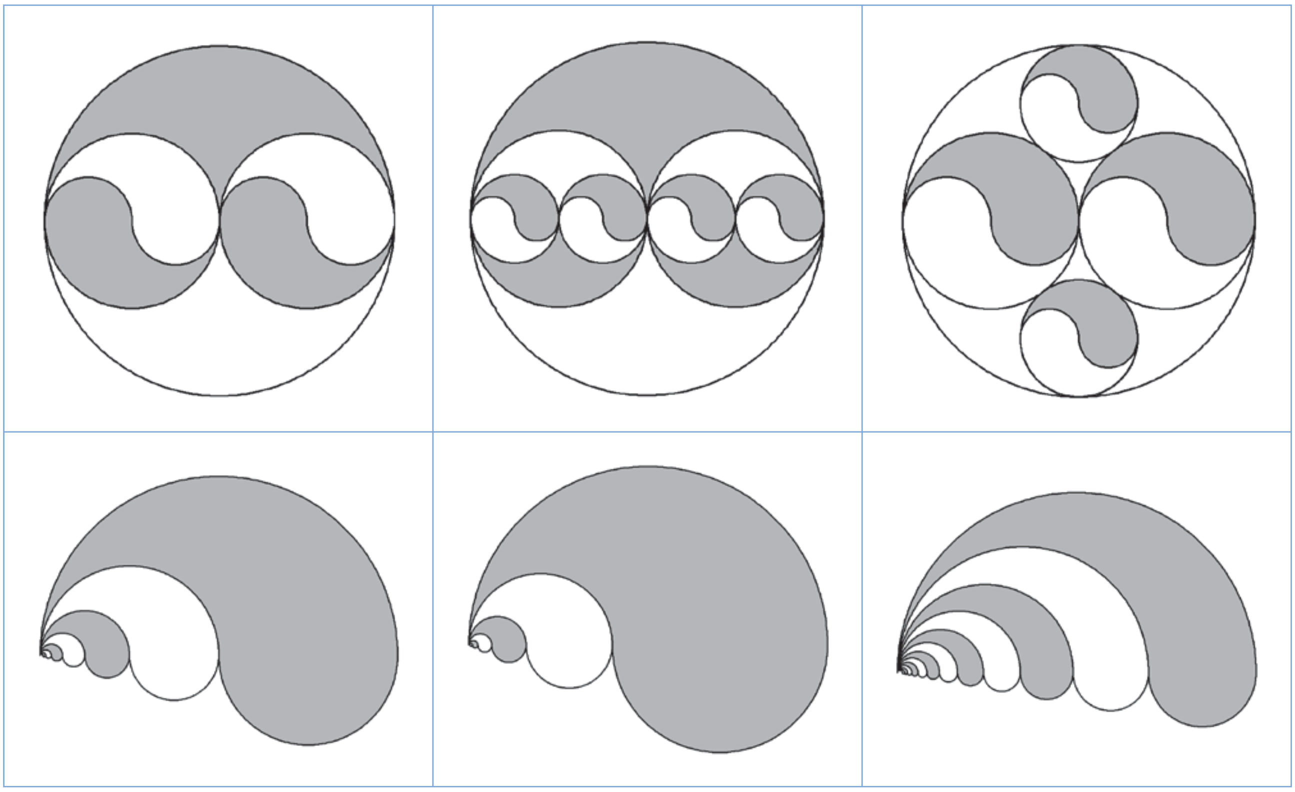
Yin und Yang

Das bekannte Yin-Yang-Symbol lässt sich auf verschiedene Art und Weise variieren.

Worin besteht die Variation bei den Figuren in der oberen Reihe?

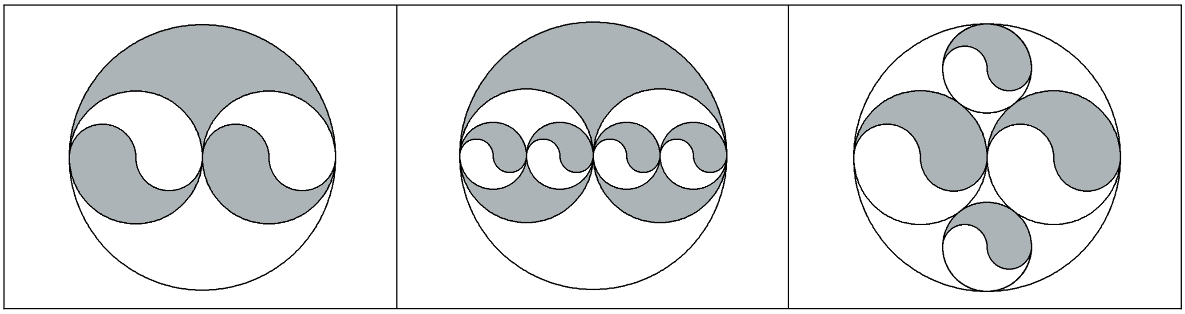
Mache eigene Vorschläge für weitere Variationen.

Wie groß sind die Flächen der Figuren in der unteren Reihe? Welche Anteile dieser Flächen sind grau gefärbt?



MNU 66/3 (15.4.2013), ISSN 0025-5866, © Verlag Klaus Seeberger, Neuss

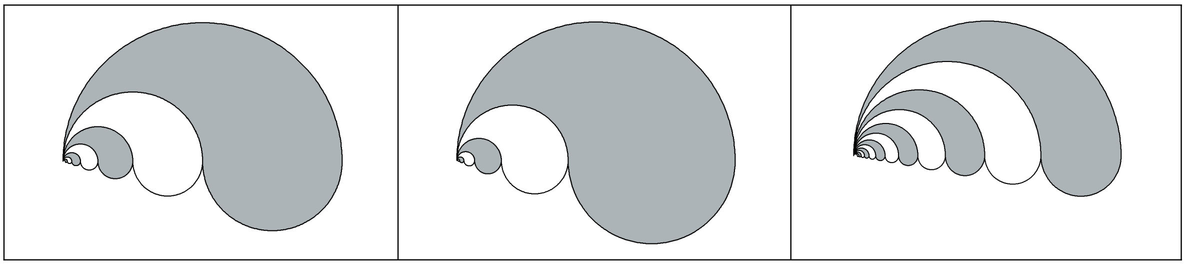
Lösung



Worin besteht die Variation bei den Figuren in der oberen Reihe?

Bei der ersten Abbildung sind innen zwei kleine „Yin und Yang"-Kreise gezeichnet worden, der Rest der Kreisfläche wurde dann symmetrisch grau bzw. weiß ausgefüllt, sodass in der gesamten Figur gleich große Flächen weiß und grau ausgefüllt sind. Die zweite Figur enthält zwei Figuren vom Typ der ersten Abbildung (nur um 180° gedreht); auch hier wurde die restliche Figur symmetrisch grau und weiß gefüllt, sodass auch hier je 50 % der Gesamtfläche weiß bzw. grau gefärbt ist.

Bei der dritten Figur sind in einen Kreis zwei kleine „Yin und Yang"-Kreise gezeichnet (Radius halb so groß wie der Radius des umgebenden Kreises). In die restliche Kreisfläche wurden zwei maximale Kreise eingezeichnet, die nach dem „Yin und Yang"-Muster unterteilt sind. Der Radius dieser passenden Kreise ist gerade ein Drittel des Radius des Ausgangskreises, wie man mithilfe des Satzes des PYTHAGORAS nachrechnen kann. Von der Gesamtfläche des Kreises ist also grau gefärbt: die Hälfte der Kreisflächen, deren Fläche je ein Viertel der Gesamtfläche ausmacht, sowie die Hälfte der Kreisflächen, deren Fläche je ein Neuntel der Gesamtfläche ausmacht, das sind $13/36 \approx 36$ %.



Wie groß sind die Flächen der Figuren in der unteren Reihe? Welche Anteile dieser Flächen sind grau gefärbt?

Die erste Figur besteht aus einem Halbkreis (mit Radius r), bei dessen rechter Hälfte ein grau gefärbter Halbkreis (mit Radius $\frac{1}{2} \cdot r$) aufgesetzt ist; da auf der linken Seite ein ebenso großer Halbkreis (mit Radius $\frac{1}{2} \cdot r$) nach oben weggenommen wurde, ist der große grau gefärbte Bereich gerade so groß wie ein Halbkreis, also $A_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$.

Das Gleiche wurde dann mit dem weiß gefärbten Halbkreis (Radius $\frac{1}{2} \cdot r$) gemacht: Die weiße Teilfigur ist also $\frac{1}{4}$ -mal so groß wie die erste graue Teilfigur

$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^2 = {}^1/_8 \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{4} \cdot A_1$

Entsprechend gilt dann weiter: $A_3 = \frac{1}{4} \cdot A_2$ und $A_4 = \frac{1}{4} \cdot A_3$ usw.

Für die grau gefärbten Flächenstücke gilt dann:

$A_{grau} = A_1 + A_3 + A_5 + \dots$

$$= A_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{16^3} + \dots\right) = A_1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{16}{15} \cdot A_1 = \frac{8}{15} \cdot \pi \cdot r^2$$

Für die weiß gefärbten Flächenstücke gilt analog:

$A_{weiß} = A_2 + A_4 + A_6 + \dots$

$$= A_2 \cdot \left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{16^3} + \dots\right) = A_2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{16}{15} \cdot A_2 = \frac{2}{15} \cdot \pi \cdot r^2$$

Dass die grau gefärbte Fläche viermal so groß wie die weiß gefärbte, ließ sich ja schon beim Vergleich der ersten beiden Teilflächen ablesen.

Der Flächeninhalt der gesamten Figur berechnet sich aus der Summe der beiden gefärbten Teilflächen:

$$A = A_{grau} + A_{weiß} = \frac{10}{15} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \ .$$

Insgesamt ist 80 % der gezeichneten Figur grau gefärbt und 20 % weiß gefärbt.

Bei der zweiten Figur wurde der Durchmesser des zunächst gezeichneten Halbkreises nicht halbiert, sondern in einem bestimmten Verhältnis geteilt (hier im Verhältnis 60 : 40).

Der Flächeninhalt der ersten (grauen) Teilfigur ist also:

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot [\, r^2 \cdot \pi + (0{,}6 \cdot r)^2 \cdot \pi - (0{,}4 \cdot r)^2 \cdot \pi]$

$= \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot [\, 1 + 0{,}6^2 - 0{,}4^2 \,] = 1{,}2 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi$

Wählt man allgemein den Faktor k, dann ergibt sich:

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot [\, r^2 \cdot \pi + (k \cdot r)^2 \cdot \pi - ((1-k) \cdot r)^2 \cdot \pi]$

$= \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot [\, 1 + k^2 - (1-k)^2 \,] = 2k \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi$

Für die zweite (weißen) Teilfigur gilt dann: Der Durchmesser des Halbkreises ist 0,4-mal so groß wie der des ursprünglichen Halbkreises; auf diesen wird nach unten ein Halbkreis gesetzt, dessen Durchmesser 60 % des Durchmessers dieses Halbkreises ist, und nach oben ein Halbkreis ausgespart, dessen Durchmesser 40 % des Durchmessers dieses Halbkreises ist.

MNU 66/3 (15.4.2013), ISSN 0025-5866, © Verlag Klaus Seeberger, Neuss

Der Flächeninhalt der zweiten (weißen) Teilfigur ist also:

$A_2 = ½ \cdot [(0{,}4 \cdot r)^2 \cdot \pi + (0{,}6 \cdot (0{,}4 \cdot r))^2 \cdot \pi – (0{,}4 \cdot (0{,}4 \cdot r))^2 \cdot \pi]$

$= ½ \cdot 0{,}4^2 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot [1 + 0{,}6^2 – 0{,}4^2] = 0{,}4^2 \cdot 1{,}2 \cdot ½ \cdot r^2 \cdot \pi = 0{,}16 \cdot A_1$

Allgemein:

$A_1 = 2k \cdot ½ \cdot r^2 \cdot \pi$; $A_2 = (1 – k)^2 \cdot A_1$; $A_3 = (1 – k)^2 \cdot A_2$ usw.

Alle weiß gefärbten Teilflächen sind nur $(1 – k)^2$ so groß wie die vorangehenden grau gefärbten Teilflächen. Bei der zweiten Figur, also für k = 0,6, gilt: die weiß gefärbten Teilflächen sind nur 0,16-mal so groß wie die grau gefärbten Teilflächen.

Die gesamte grau gefärbte Fläche ist

$$A_{grau} = A_1 \cdot \left(1+(1-k)^4+(1-k)^8+\ldots\right) = A_1 \cdot \frac{1}{1-(1-k)^4} = \frac{k}{1-(1-k)^4} \cdot \pi \cdot r^2$$

Für die weiß gefärbte Fläche gilt insgesamt:

$$A_{weiß} = (1 – k)^2 \cdot A_{grau} = \frac{(1-k)^2 \cdot k}{1-(1-k)^4} \cdot \pi \cdot r^2 .$$

Der Flächeninhalt der gesamten Figur berechnet sich aus der Summe der beiden gefärbten Teilflächen:

$$A = A_{grau} + A_{weiß} = (1+(1-k)^2) \cdot \frac{k}{1-(1-k)^4} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{k}{1-(1-k)^2} \cdot \pi \cdot r^2$$

Der Anteil der grau gefärbten Fläche an der gesamten Fläche der Figur ergibt sich dann aus dem Verhältnis $1 : (1 + (1 – k)^2)$.

Im Beispiel der zweiten Figur ist dies:

$$A = A_{grau} + A_{weiß} = \frac{0{,}6}{1-0{,}4^2} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{5}{7} \cdot \pi \cdot r^2 ;$$

der graue Anteil beträgt 1 : 1,16 ≈ 86 %.

In der dritten Figur ist k = 0,3 gewählt worden. Hier ergibt sich:

$$A = A_{grau} + A_{weiß} = \frac{0{,}3}{1-0{,}7^2} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{10}{17} \cdot \pi \cdot r^2 ;$$

der graue Anteil beträgt 1 : 1,49 ≈ 67 %.

Nachtrag: Kontrolle der Rechnungen bei der ersten Figur: hier ist k = 0,5, also

$$A = A_{grau} + A_{weiß} = \frac{0{,}5}{1-0{,}5^2} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 ;$$

der graue Anteil beträgt 1 : 1,25 = 80 % .