Wie viele Dreiecke?

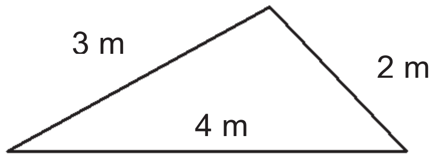
Heinz Klaus Strick

Online-Ergänzung

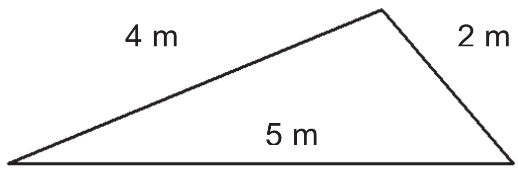
HEINZ KLAUS STRICK

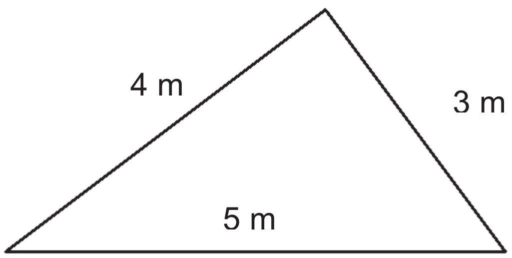
Wie viele Dreiecke?

Aus den drei Holzstäben der Länge 2 m, 3 m und 4 m kann man genau ein Dreieck herstellen.



Aus vier Holzstäben der Länge 2 m, 3 m, 4 m und 5 m kann man drei verschiedene Dreiecke erzeugen: außer dem Dreieck mit den Seitenlängen 2 m, 3 m, 4 m noch





Wie viele verschiedene Dreiecke kann man aus fünf, sechs, …, zehn Holzstäben der Länge 2 m, 3 m, 4 m usw. herstellen?

Beachte: Aus Holzstäben der Länge 1 m, 2 m und 3 m kann man kein Dreieck herstellen, weil die Summe der Seitenlängen der beiden kürzeren Seiten gerade so groß ist wie die Länge der größten Seite – entsprechendes gilt für andere Längen.

MNU 66/3 (15.4.2013), ISSN 0025-5866, © Verlag Klaus Seeberger, Neuss

Lösung

Die Gesamtzahl der möglichen Dreiecke aus n Holzstäben bestimmen wir schrittweise; denn wir können zwei Arten von Dreiecken unterscheiden:

1. Dreiecke, bei denen wir nur die (n-1) Holzstäbe des vorangehenden Schritts benutzen,
2. Dreiecke, bei denen der Holzstab der Länge (n+1) die längste Seite darstellt.

Beispiel: Wie viele Dreiecke kann man aus den fünf Holzstäben der Länge 2 m, 3 m, 4 m, 5 m, 6 m herstellen?

1. Unter den gesuchten Dreiecken gibt es solche, für die wir nur die Holzstäbe der Länge 2 m, 3 m, 4 m, 5 m benutzen. Von dieser Art gibt es drei verschiedene Möglichkeiten, nämlich die Dreiecke (4; 3; 2), (5; 4; 3), (5; 4; 2). Das hatten wir im Schritt vorher ausgerechnet (vgl. Aufgabenstellung).
2. Außerdem gibt es solche, bei denen der Holzstab der Länge 6 m die längste Seite des Dreiecks ist. Von diesem Typ gibt es die vier Dreiecke (6; 5; 4), (6; 5; 3), (6; 5; 2), (6; 4; 3).

Bezeichnen wir die Anzahl der möglichen Dreiecke aus den fünf Holzstäben der Länge 2 m, 3 m, 4 m, 5 m, 6 m mit **D(5)**, dann berechnet sich diese Zahl wie folgt:

D(5) = **D(4)** + Anzahl der Dreiecke mit längster Seite 6 m

Dabei berechnet sich **D(4)** wiederum wie folgt:

D(4) = **D(3)** + Anzahl der Dreiecke mit längster Seite 5 m

D(3) =1; denn es gibt nur ein mögliches Dreieck aus drei Holzstäben, dies ist (4; 3; 2).

Und wie im Aufgabenblatt ausgeführt, gibt es zwei Dreiecke mit längster Seite 5 m, nämlich (5; 4; 3), (5; 4; 2).

Wenn man also diese Anzahl der Dreiecke mit längster Seite ... m bestimmen will, muss man hierfür eine Regelmäßigkeit herausfinden. Dies können wir dadurch entdecken, indem wir die möglichen Dreiecke geschickt in einem Schema anordnen:

Beispiele:

5 Holzstäbe (2 m, 3 m, 4 m, 5 m, 6 m)

– längster Holzstab: 6 m

zweitlängster Holzstab 5 m	zweitlängster Holzstab 4 m
(6; 5; 4)	
(6; 5; 3)	(6; 4; 3)
(6; 5; 2)	

6 Holzstäbe (2 m, 3 m, 4 m, 5 m, 6 m, 7 m)

– längster Holzstab: 7 m

zweitlängster Holzstab 6 m	zweitlängster Holzstab 5 m	zweitlängster Holzstab 4 m
(7; 6; 5)		
(7; 6; 4)	(7; 5; 4)	
(7; 6; 3)	(7; 5; 3)	
(7; 6; 2)		

7 Holzstäbe (2 m, ... , 8 m)

– längster Holzstab: 8 m

zweitlängster Holzstab 7 m	zweitlängster Holzstab 6 m	zweitlängster Holzstab 5 m
(8; 7; 6)		
(8; 7; 5)	(8; 6; 5)	
(8; 7; 4)	(8; 6; 4)	(8; 5; 4)
(8; 7; 3)	(8; 6; 3)	
(8; 7; 2)		

8 Holzstäbe (2 m, ... , 9 m)

– längster Holzstab: 9 m

zweitlängster Holzstab 8 m	zweitlängster Holzstab 7 m	zweitlängster Holzstab 6 m
(9; 8; 7)		
(9; 8; 6)	(9; 7; 6)	
(9; 8; 5)	(9; 7; 5)	(9; 6; 5)
(9; 8; 4)	(9; 7; 4)	(9; 6; 4)
(9; 8; 3)	(9; 7; 3)	
(9; 8; 2)		

Hieraus lesen wir folgende Regelmäßigkeiten ab:

$D(3) = 1$

$D(4) = D(3) + 2 = 1 + 2 = 3$

$D(5) = D(4) + (3+1) = 3 + 4 = 7$

$D(6) = D(5) + (4+2) = 7 + 6 = 13$

$D(7) = D(6) + (5+3+1) = 13 + 9 = 22$

$D(8) = D(7) + (6+4+2) = 22 + 12 = 34$

Weiter ergibt sich entsprechend:

$D(9) = D(8) + (7+5+3+1) = 34 + 16 = 50$

$D(10) = D(9) + (8+6+4+2) = 50 + 20 = 70$

Begründung zu D(9): Die längste Seite ist 10 m lang. Deshalb können die sieben Dreiecke (10; 9; 8), ..., (10; 9; 2) gebildet werden,
außerdem die fünf Dreiecke (10; 8; 7), ... , (10; 8; 3)
und die drei Dreiecke (10; 7; 6), ... , (10; 7; 4)
und schließlich noch das eine Dreieck (10; 6; 5).

MNU 66/3 (15.4.2013), ISSN 0025-5866, © Verlag Klaus Seeberger, Neuss

Begründung zu D(10): Die längste Seite ist 11 m lang. Deshalb können die acht Dreiecke (11; 10; 9), ..., (11; 10; 2) gebildet werden,
außerdem die sechs Dreiecke (11; 9; 8), ... , (11; 9; 3)
und die vier Dreiecke (11; 8; 7), ... , (11; 8; 4)
und schließlich noch die zwei Dreiecke (11; 7; 5) und (11; 6; 5).

Allgemeine Begründung zu D(n): Die längste Seite ist (n+1) m lang. Deshalb können die n-2 Dreiecke (n+1; n; n-1), ..., (n+1; n; 2) gebildet werden,
außerdem die n-4 Dreiecke (n+1; n-1; n-2), ... , (n+1; n-1; 3)
und die n-6 Dreiecke (n+1; n-2; n-3), ... , (n+1; n-2; 4) usw.,
solange solche Terme gebildet werden können.

Die allgemeine Formel zur Berechnung der Anzahl ist:

$D(n) = D(n-1) + [(n-2) + (n-4) + (n-6) + \dots + 1]$ falls n ungerade ist
$D(n) = D(n-1) + [(n-2) + (n-4) + (n-6) + \dots + 2]$ falls n gerade ist

Die Klammerterme kann man direkt berechnen (das lernt man evtl. in der Oberstufe):

$$\boxed{D(n) = D(n-1) + \frac{(n-1)^2}{4}}$$ falls n ungerade

und $$\boxed{D(n) = D(n-1) + \frac{n\cdot(n-2)}{4}}$$ falls n gerade