Werkzeugkompetenzen

Kompetent mit digitalen Werkzeugen Mathematik betreiben

Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Verlag medienstatt
Die Werkstatt für Kommunikation
ISBN: 978-3-938052-15-0

CLASSPAD II: PRAKTISCH WIE EIN TABLET, SICHER WIE EIN SCHULRECHNER

DAS SMARTE MINT-WERKZEUG MIT TOUCHSCREEN UND APPS.

- Grafikrechner mit CAS
- Großes, drehbares Farbdisplay (4,8 Zoll)
- Bedienung wie bei Tablets
- Grafiken können mit den Fingern verschoben oder aufgezogen werden
- Zuverlässige Stromversorgung: Laufzeit bis zu 130 Unterrichtsstunden[1]
- Robuste Bauweise für langjährigen Schuleinsatz
- Einfacher Reset
- Keine Spiele-Apps, keine Schad-Software
- Keine drahtlose Kommunikation möglich

Colour Display

[1] Handelsübliche Batterien 4x AAA

CASIO Europe GmbH, Educational Team • Casio-Platz 1 • 22848 Norderstedt • Telefon: 040/528 65-0 • Fax: 040/528 65-100

CASIO®

Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann,
Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht,
Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Werkzeugkompetenzen

Kompetent mit digitalen Werkzeugen Mathematik betreiben

Verlag medienstatt
Die Werkstatt für Kommunikation

Impressum

1. Auflage 2017

Autoren
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Layout und Gestaltung
Klaus Jeunette, medienstatt GmbH, 58706 Menden (Sauerland)

Gestaltung Titelbild: Oliver Labs, math-sculpture.com
Druck, Bindung und Verarbeitung:
becker druck, F.W. Becker GmbH
Grafenstraße 46, 59821 Arnsberg

Verlag und Gesamterstellung
Verlag medienstatt GmbH – Die Werkstatt für Kommunikation,
Unnaer Straße 50, 58706 Menden (Sauerland), www.medienstatt.de.

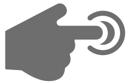
Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

ISBN 978-3-938052-15-0

Arbeiten mit dem Buch

Dieses Buch gibt Ihnen in der elektronischen Version die Möglichkeit über interaktive Elemente zusätzliche Informationen abzurufen. Sprungbefehle zu Buchseiten, Links zu GeoGebra- und TI-Nspire-Aufgabendateien sowie Downloadlinks zu PDF-Kopiervorlagen nutzen digitale Möglichkeiten und ergänzen die Buchinhalte.

Interaktive Elemente sind im EPUB mit diesem Zeichen markiert.



Mit einem Klick / Touch auf den GeoGebra-, TI-Nspire- oder PDF-Button im Layout wird die entsprechende Datei über das Internet zugänglich gemacht. In der gedruckten Version müssen die Links im Browser eingegeben werden.

Die GeoGebra-Datei wird über GeoGebra-Tube bereitgestellt und öffnet sich in einer Browserumgebung mit der entsprechenden Aufgabe. Auf dem digitalen Endgerät muss dazu das Programm / die App GeoGebra nicht installiert sein.

Sie können die vollständige ggb-Datei aber auch downloaden und in der Programmumgebung damit weiterarbeiten.

Die TI-Nspire-Dateien werden zum Download angeboten. Sie benötigen für diese Anwendung die Software TI-Nspire.

Die Aufgabenblätter können als Kopiervorlage im pdf-Format geladen werden.

Bilder liegen im jpg-Format vor und können in den digitalen Aufgaben verwendet werden.

Danksagung

Der MNU - Verband zur Förderung des MINT-Unterrichts tritt seit 1891 für Qualität und Fortschritt in den mathematischen und naturwissenschaftlichen Schulfächern ein. Durch praxiserprobte Fortbildungen und fachlichen Dialog unterstützt MNU Lehrerinnen und Lehrer bei ihrer anspruchsvollen Arbeit und der Weiterentwicklung beruflicher Fähigkeiten.

Gemeinsames Ziel mit T³ (Teachers Teaching with Technology) ist ein Unterricht, der Schülerinnen und Schülern hilft, die Inhalte und Denkweisen des Faches zu verstehen und das Fach Mathematik als lebendig und sinnstiftend zu erleben, sodass es ihnen Freude macht, sich damit zu beschäftigen.

Das Lehrerfortbildungsprojekt T³ ist Lehrernetzwerk, das seit 20 Jahren national und international die Erfahrungen engagierter Lehrerinnen und Lehrer beim Einsatz digitaler Werkzeuge bündelt und analysiert, wissenschaftliche Studien unterstützt und entsprechende Ergebnisse interessierten Kolleginnen und Kollegen zur Verfügung stellt. Dies geschieht u. a. auf schulinternen Fortbildungen, Regionaltagungen mit Vorträgen und Workshops und in Form von lehrplanrelevantem Unterrichtsmaterial für Lernende und Lehrende.

Der MNU setzt sich für einen zeitgemäßen Einsatz von digitalen Werkzeugen und für eine Bildung in der digitalen Welt ein. Deren Erwerb darf nicht irgendwelchen Zufälligkeiten überlassen werden. Deshalb begrüßt der MNU ausdrücklich die Bemühungen der KMK, das Thema „Digitalisierung" in den Schulen zu stärken. Mit der Gründung der Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen hat er seine fachliche Expertise eingesetzt und exemplarisch für den Mathematikunterricht eine Handreichung ermöglicht und damit einen Dialog zwischen den Verbänden und Fachexperten zu dieser Thematik initiiert.

Die Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen (kurz: WeKo) wurde auf Initiative des Fördervereins MNU gegründet und zusammen mit T³ finanziell unterstützt. Auf zahlreichen gemeinsamen Arbeitstagungen wurden Erfahrungen ausgetauscht, praxistaugliche Beispiele entwickelt und Konzeptionen für ein schulinternes Medienkonzept aufgezeigt.

Wir danken Mario Poethke für seine zeitweise Mitarbeit in unserer Arbeitsgruppe, Ulla Schmidt für ihre Bereicherung durch Arbeitsmaterialien und Prof. Dr. Bärbel Barzel für die konstruktive Betreuung des WeKo- Projektes.

Unser Dank geht auch an alle Kolleginnen und Kollegen, die in Diskussionen Hinweise und Beiträge geliefert haben. Wir danken insbesondere der GDM und der gemeinsamen Mathematik-Kommission Übergang Schule-Hochschule von DMV, GDM und MNU für die Möglichkeit, auf ihren Tagungen schon Zwischenergebnisse unserer Arbeit vorzustellen und darüber mit den Kolleginnen und Kollegen zu diskutieren.

Die Autoren

Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Dr. Heinz Laakmann, Dr. Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Prof. Dr. Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Dr. Carsten Tietz

Inhalt

$\int_0^\infty w(t)\,dt$

1. Vorwort

Die Arbeitsgruppe „Werkzeugkompetenzen" aus Vertretern des Fachlehrerverbandes MNU-Verband zur Förderung des MINT-Unterrichts und des Lehrerfortbildungsprojekts T³ (Teachers Teaching with Technology) beschäftigt sich mit der Frage, über welche Kompetenzen Lernende zum Abitur bzw. nach Abschluss der Sekundarstufe I beim Umgang mit digitalen Werkzeugen im Fach Mathematik verfügen sollen.

Digitale Medien gehören in vielfältigen Bereichen zum festen Bestandteil des gesellschaftlichen (und damit unterrichtlichen) Alltags. Schülerinnen und Schüler wachsen mit Medien auf, und die digitalen Medien prägen unser gesellschaftliches Leben entscheidend mit. Es ist eine gesellschaftliche Aufgabe und damit auch eine Aufgabe von Schule, den Nutzen, das Potential, aber auch die Grenzen solcher Medien zu vermitteln.

Im Mathematikunterricht können digitale Medien heutzutage insbesondere als digitale Werkzeuge genutzt werden, um mit ihnen mathematische Sachverhalte zu erkunden und mathematische Probleme zu bearbeiten. Die Betonung des Werkzeugcharakters macht hier insbesondere deutlich, dass diese Hilfsmittel im Mathematikunterricht einem ganz spezifischen Zweck unterliegen: Sie werden genutzt bzw. können genutzt werden, um in kompetenter Weise Mathematik zu betreiben. Mit dieser Betonung wird auch deutlich, dass zentraler Kern des Mathematikunterrichts nach wie vor die Mathematik ist, die je nach Gegenstandsbereich mit unterschiedlichsten Werkzeugen erfahren werden kann – etwa mit Zirkel und Lineal, mit dem Geodreieck oder mit digitalen Werkzeugen.

Dabei ergeben sich Herausforderungen für fachdidaktische und unterrichtliche Weiterentwicklungen auf verschiedenen Ebenen:

- **Lernkontexte und Aufgabenkultur**
  Die Nutzung digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht hat zwangsläufig Auswirkungen auf die Aufgabenkultur. Auch wenn bereits vielfältige praxiserprobte und wissenschaftlich beforschte Lernkontexte vorliegen, so zeigt ein Blick in die unterrichtliche Praxis, dass solche Veränderungsprozesse der Aufgabenkultur und häufig damit verbunden auch der Unterrichtskultur nicht immer reibungsfrei verlaufen. Für die Kolleginnen und Kollegen im Fachunterricht stellen sich bei einer Nutzung solcher digitalen Werkzeuge neben der Frage nach dem Einsatz und der Bedienung des Werkzeugs an sich auch Fragen nach geeigneten und produktiven Aufgabenformaten, nach schüleraktivierenden Arbeitsformen mit den digitalen Werkzeugen sowie nach praxistauglichen Prüfungsformaten, die etwa auch rechnerfreie Teile umfassen.

- **Werkzeugkompetenzen**
  Das Potential digitaler Werkzeuge für den Mathematikunterricht ist bereits anhand von Forschungsergebnissen und unterrichtspraktischen Beiträgen belegt, wie etwa das M³-Projekt von Weigand & Bichler (2003 – 2012) oder das Calimero-Projekt von Bruder & Pinkernell (2005 – 2013). Unklarheit besteht aber noch darüber, über welche Werkzeugkompetenzen die Schülerinnen und Schüler jeweils verfügen sollten, um sich in adäquater Weise mit den mathematischen Gegenständen in den unterschiedlichen Jahrgangsstufen auseinander

zu setzen. In diesem Zusammenhang ist insbesondere der Begriff der Werkzeugkompetenz bisher sehr wenig fundiert.

Gerade die Beantwortung dieser letzten Frage, was digitale Werkzeugkompetenz eigentlich meint und über welche digitalen Werkzeugkompetenzen die Schülerinnen und Schüler, etwa zum Ende der Jahrgangsstufen 6, 8, 10, Q2 verfügen sollten, ist eine der wesentlichen Voraussetzungen, um in überzeugender Weise unterrichtliche und aufgabenbezogene Neuerungen im Mathematikunterricht in Gang zu setzen (Stichwort: Aufgabenkultur) und für diese (etwa im Rahmen von Fortbildungen) zu werben.

Digitale Werkzeugkompetenzen sind nicht einfach irgendwelche Kompetenzen neben anderen, sondern liegen quer zu allen inhaltlichen Kompetenzen / Leitideen und allen anderen prozessbezogenen Kompetenzen und spielen bei allen drei oft zitierten Grunderfahrungen nach Heinrich Winter (1996) eine wesentliche Rolle.

Der Mathematikunterricht ist dadurch allgemeinbildend, dass er drei Grunderfahrungen ermöglicht:
(G1) „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
(G2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
(G3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben."

Tabelle 1: Grunderfahrungen nach Winter

Stark verkürzt könnte man die Aussagen von Winter zusammenfassen zu: G1: mathematische Anwendungen, G2: innermathematisches Arbeiten, G3: Problemlösen, Heuristik. Sicherlich muss man konstatieren, dass im derzeitigen Mathematikunterricht nicht alle drei Grunderfahrungen gleich stark berücksichtigt werden. In keinem Fall sollte aber eine außer Acht gelassen werden.

In ☛ *Kapitel 2* des vorliegenden Werkes wird zunächst grundsätzlich ausgeführt, was wir unter digitalen Werkzeugen und in ☛ *Kapitel 3* unter Werkzeugkompetenzen verstehen, und dann ein Überblick über den aktuellen Stand der digitalen mathematischen Werkzeuge gegeben.

In ☛ *Kapitel 4* wird diese systematische Perspektive konkret ergänzt um eine jahrgangsstufenbezogene Perspektive, bei der jeweils der Nutzen und die Potentiale digitaler Werkzeuge zu unterschiedlichen mathematischen Gegenständen exemplarisch entlang Jahrgangsstufen aufgezeigt werden

In ☛ *Kapitel 5* werden Beispiele zum Einsatz digitaler Werkzeuge in den Klassen 5 - Q2 vorgestellt, die sowohl in Papierform als auch digital zur Verfügung stehen.

In ☛ *Kapitel 6* wird die Problematik der Dokumentation aufgegriffen.

2. Digitale Werkzeuge

Zunächst macht es Sinn, den Begriff des Werkzeugs zu klären.

„Ein Werkzeug ist ein Hilfsmittel, um auf etwas einzuwirken. Unter Werkzeug im unterrichtlichen Zusammenhang verstehen wir flexibel einsetzbare Hilfsmittel beim Lehren und Lernen, Lernwerkzeuge also. (...) Gute Lernwerkzeuge sorgen für eine Arbeitserleichterung und ermöglichen bzw. unterstützen wichtige Lernaktivitäten." (Elschenbroich 2011)

Werkzeuge spielen eine bedeutsame Rolle im Mathematikunterricht. Mit den Fortschritten in der Mathematik und mit den neuen Werkzeugen änderte sich im Laufe der Geschichte auch der Mathematikunterricht in seinen Zugängen zu Themen, didaktischen Möglichkeiten und letztlich auch in seinen Inhalten. Werkzeuge an sich sind nicht gut oder schlecht. Das gilt für das Geodreieck und den grafikfähigen Taschenrechner wie für alltägliche Werkzeuge wie Hammer oder Kettensäge. Es kommt auf den Gebrauch an und ggf. dabei auch auf den Kontext. Die Aufgabe muss zum Werkzeug passen und das Werkzeug zur Aufgabe.

Werkzeuge werden aber gerne verabsolutiert und dabei glorifiziert („*Der Computer macht schlau.*") oder dämonisiert („*Der Taschenrechner ist schuld.*"). Für den Mathematikunterricht gilt in diesem Zusammenhang, dass digitale Werkzeuge nicht um ihrer selbst willen genutzt werden sollten. Vielmehr muss der wohlreflektierte Einsatz solcher Werkzeuge dazu beitragen, die Mathematik besser zu verstehen und angemessen zu erfahren. Die in dieser Handreichung beschriebenen unterrichtspraktischen Beispiele sollen die Möglichkeiten und den Mehrwert digitaler Werkzeuge deutlich machen.

Die Neuentwicklung von Werkzeugen, die in der Mathematik für die Bearbeitung von Problemen genutzt werden, ist kein neues Phänomen – Heft und Stift, Tafel und Kreide, Zirkel und Lineal, Logarithmentafeln bis zu Taschenrechnern und Computerprogrammen markieren allesamt Weiter- und Neuentwicklungen von Werkzeugen, die historisch gesehen für mathematisches Arbeiten genutzt wurden. Mit digitalen Werkzeugen ändern sich insbesondere das Verständnis von Operationen und der Grad ihrer Verfügbarkeit.

Dieser Abschnitt hat neben einer grundlegenden Begriffsklärung das Ziel, den Nutzen und Zweck digitaler Werkzeuge für den Mathematikunterricht im Allgemeinen zu beleuchten.

Tabelle 2a stellt zunächst zentrale Aspekte von digitalen Medien im Allgemeinen und demgegenüber digitalen Werkzeugen im Besonderen gegenüber.

	Digitale Medien im Mathematikunterricht	Digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht
Charakteristische Eigenschaften	Digitale Medien dienen als Träger oder Übermittler von Informationen.	Digitales (Lern-)Werkzeug dienen als flexibel einsetzbares Hilfsmittel beim Lehren und Lernen.
Didaktisches Potential	Medien dienen der Informationsvermittlung zwischen Lehrkraft und Lernenden und unterstützen als Werkzeuge in Schülerhand die mathematischen Handlungen der Schüler.	Ihr didaktisches Potential entfalten digitale Werkzeuge insbesondere, wenn sie vielfältig und flexibel eingesetzt werden können und sich deren Einsetzbarkeit nicht ausschließlich auf einen speziellen Aspekt eines Themas beschränkt (etwa Übungsprogramme zur Multiplikation von Brüchen). Es ist wichtig beim Umgang mit digitalen Werkzeugen, dass Schülerinnen und Schüler ein passendes Werkzeug eigenständig und situationsangemessen auswählen können.
Beispiele	Die Bandbreite reicht von Computer und zugehöriger Software bis MP3-Player, Digitalkamera, Spielkonsole, DVD-Player, Smartphone und Tablet.	Digitale Werkzeuge sind Programme, die flexibel im Mathematikunterricht eingesetzt werden können wie Tabellenkalkulation, Dynamische Geometrie-Software und Computeralgebra, aber auch allgemeine Software wie Textverarbeitung, Präsentations-Software, Internet-Browser, Mindmapping-Software etc. Diese sind auf verschiedener Hardware (z. B. Computer, Laptop, Tablet oder Handheld wie moderne Grafiktaschenrechner) nutzbar.

Tabelle 2a: Digitale Werkzeuge und digitale Medien

Dass wir im Zusammenhang mit der Nutzung digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht überhaupt von Werkzeugen sprechen, ist relativ neu. Vorher wurde meist von Medien und speziell „neuen" Medien gesprochen. Die Fokussierung auf den Werkzeugaspekt betont in diesem Zusammenhang insbesondere, dass es darum geht, als Lernende mathematisch aktiv zu sein, um Mathematik besser zu verstehen oder authentischer zu erfahren. Wir sprechen daher hier nicht von neuen Medien, weil dies doppelt daneben trifft: Erstens sind es keine neuen Medien mehr und zweitens geht es nicht um Medien allgemein (die ja auch mit einer Konsumhaltung verbunden sind), sondern spezifisch um didaktische Werkzeuge.

Digitale Werkzeuge entfalten ihr Potential im Mathematikunterricht insbesondere dadurch, dass die Schülerinnen und Schüler selbstständig im Unterricht durch ihre eigene Lerntätigkeiten mathematische Objekte und Zusammenhänge entdecken und erfassen. Hier ist ein Unterschied allgemein zu digitalen Medien, bei denen ein konsumierender Aspekt häufig dominiert, wie z. B. das Anschauen eines Videos auf YouTube.

Digitale Werkzeuge sollen nicht um ihrer selbst willen eingesetzt werden, sondern um in kompetenter Weise Mathematik zu betreiben und mathematische Gegenstände sinnstiftend zu erfahren. Eine kompetente Nutzung digitaler Werkzeuge beinhaltet auch, dass die Schülerinnen und Schüler ihr Werkzeug auswählen können und somit die Art ihres Zugangs und die Darstellungsform selbst bestimmen können. Deswegen werden wir uns hier auch besonders mit Multirepräsentationswerkzeugen beschäftigen. Im Optimalfall sollten die Schülerinnen und Schüler auch Potentiale und Grenzen reflektieren und ihre Werkzeugwahl auch begründen können. Dazu gehört weiter, den Werkzeugeinsatz auch in angemessener Form zu dokumentieren.

Digitale Werkzeuge sind kein Gegenpol zu den analogen Werkzeugen wie Zirkel, Rechenschieber, Tabellenwerke und Formelsammlungen, sondern eine Weiterentwicklung und Ergänzung.

Auf der Hardware-Seite haben wir die Taschenrechner vom wissenschaftlichen Taschenrechner (WTR) bis zum Graphik-Taschenrechner (GTR) und Computeralgebra-Taschenrechner (CAS-TR), oft auch zusammenfassend als Handhelds bezeichnet. Daneben gibt es das breite Angebot an Computern vom Desktop-PC bis zum Laptop und Tablet, die natürlich entsprechende Software benötigen. Entsprechend der unterschiedlichen Herstellerfirmen werden jeweils auch unterschiedliche Betriebssysteme an den Schulen genutzt.

Weiter halten digitale Tafeln (interactive boards) zunehmend Einzug in den Schulen. Diese sind auch mit eigener Software ausgestattet. Es ist aber unserer Ansicht nach aber sinnvoller, diese Tafeln als großen Wand-Touchscreen mit Notiz-Fähigkeit und Speicher-Fähigkeit zu nutzen und ansonsten die Standard-Software von der jeweiligen Hardware zu projizieren. Deswegen werden sie hier nicht als eigenständiges Werkzeug thematisiert.

Auf der Softwareseite gibt es neben unzähligen Programmen und Apps umfassendere mathematische Werkzeuge, auf die wir uns hier konzentrieren wollen, denn aus schulischer Sicht ist der Umgang mit diesen spezifischen Programmen aufgrund der jeweils eigenen Benutzerlogik und der oft nicht transportablen Dateiformate eher unbefriedigend.

- **Tabellenkalkulation (z. B. Excel, OpenCalc)**
  Schulische Anwendungsbereiche sind das Rechnen mit Zahlen, Variablen und Termen, die Visualisierung großer Datenmengen in Diagrammen, Boxplots und die Visualisierung von Funktionen durch ihre Funktionsgraphen.

- **Dynamische Geometrie-Software (DGS, z. B. GeoGebra, GeoNext, DynaGeo, Cinderella)**
  DGS können genutzt werden für geometrische Konstruktionen für den Einsatz von Zugmodus und Ortslinien bei Entdeckungen geometrischer Objekte, von Zusammenhängen, Lagebeziehungen und Invarianzen. Wir führen hier Raumgeometrie-Software nicht als eigenes Werkzeug auf, sondern verstehen sie als Teil der (dynamischen) Geometrie-Software.

- **Funktionenplotter**
  Sie werden genutzt für Visualisierung von Funktionen und funktionalen Zusammenhängen (auch Funktionenscharen); für numerische Berechnungen von Ableitungen und Integralen sowie für Regressionsfunktionen. Funktionenplotter sind heute meist Teil von DGS und CAS.

- **Computeralgebrasysteme (CAS z.B. TI-Nspire CAS und als Vorläufer Derive, CASIO Classpad, Maxima, GeoGebra; für die Hochschule eher Maple oder Mathematica)**
  Schulische Anwendungsbereiche liegen in der symbolischen Berechnung mit Hilfe von allgemeinen Termen mit Variablen, beim Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, beim symbolischen Differenzieren und Integrieren.

Besonders sinnvoll erscheinen uns Multirepräsentationssysteme (wie z. B. TI-Nspire, GeoGebra, Classpad), bei denen die verschiedenen Mathematikwerkzeuge gleichberechtigt nebeneinanderstehen und die Lernenden eigenständig entscheiden können, womit sie beginnen. Sie verbinden DGS, TK, Funktionenplotter und optional CAS wie in einem Werkzeugkoffer. Auf diese Weise wird ein flexibler Wechsel der Repräsentationsformen ermög-

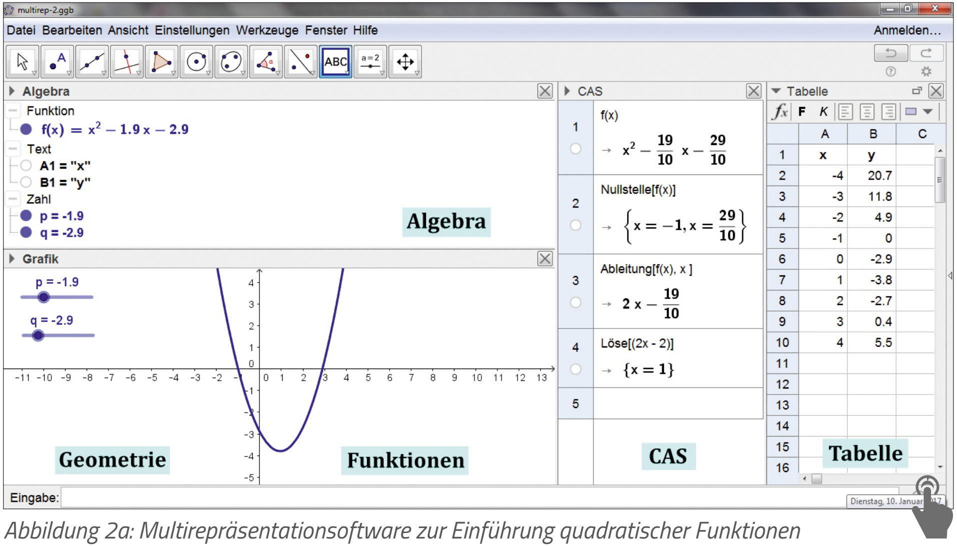


Abbildung 2a: Multirepräsentationssoftware zur Einführung quadratischer Funktionen

licht, der auch aus fachdidaktischer Sicht als wertvoll betrachtet wird, weil er einen reichhaltigen Zugang zu mathematischen Begriffen ermöglicht (Duval 2002, Bruner 1971). So zeigt die Abbildung 2a, wie mit Hilfe von Multirepräsentationssoftware ein Zugang zu quadratischen Funktionen sowohl graphisch als auch mit Hilfe einer Tabellenkalkulation oder des symbolischen Terms erfolgen kann.

Die Multirepräsentationswerkzeuge sind somit einerseits umfassende Software-Werkzeuge und andererseits auch hardwareübergreifend. Dadurch kann ein und dasselbe digitale Arbeitsblatt als Lern- und Arbeitsumgebung weitgehend identisch auf unterschiedlichen Geräten eingesetzt und parallel genutzt werden.

Die jeweiligen Tools (DGS, CAS etc.) sind dabei gleichberechtigt, sie sind miteinander vernetzt, und die Nutzer können auswählen und entscheiden. Es gibt insbesondere keine Präferenz für den Start, d. h. es wird nicht grundsätzlich mit DGS oder CAS angefangen.

Dies ist ein bedeutender Unterschied zu der Fülle von Apps zu allen möglichen Anwendungen, die aber kein durchgängiges didaktisches Konzept haben bzw. ermöglichen. Mit der Konzentration auf wenige, betriebssystemübergreifende Werkzeuge kann man besser auf die Mathematik und die Aufgabenstellung fokussieren und wird sich weniger in gerätespezifischen Besonderheiten verlieren. Wir haben uns entschieden, die Beispiele ausschließlich für GeoGebra und / oder TI-Nspire auszuarbeiten.

Es geht im Mathematikunterricht um das Erlernen von Mathematik, und die Werkzeuge dürfen kein Selbstzweck sein. Digitale Werkzeuge eröffnen mathematische Erfahrungsräume, die ohne diese nur schwer zugänglich wären. Wir sehen dabei im Wesentlichen zwei Ebenen, die den Nutzen digitaler Werkzeuge verdeutlichen: die systematische Variation und die dynamische Visualisierung.

Das Prinzip der systematischen Variation lässt sich am Beispiel der Erkundung der Kettenregel mit einem CAS verdeutlichen, siehe Tabelle 2b. Dabei wird das CAS in dem Beispiel als Black Box genutzt, mit dessen Hilfe die mathematische Struktur der abgeleiteten Exponentialfunktionen untersucht werden kann, siehe mögliche Lösung in Abbildung 2b.

Die gegebenen Funktionsterme sind so gewählt, dass die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit haben, das bei der Bildung der Ableitungsfunktion entstehende Muster zu entdecken, zu beschreiben und auf dieser Grundlage eine Idee für die Bildung der jeweiligen Ableitungsfunktionen zu erhalten und damit eine Vermutung der Kettenregel selbst zu formulieren. Daran anschließend erfinden die Schülerinnen und Schüler selbst passende Beispiele von Funktionstermen und prüfen die zuvor aufgestellte Vermutung. Anschließend kann die Kettenregel in geeigneten Lerngruppen bewiesen werden.

Aufgabenstellung zur Erkundung der Kettenregel:

Bilden Sie mit dem CAS die Ableitungen der verketteten Funktionen. Erkennen Sie eine Gesetzmäßigkeit? Formulieren Sie die Gesetzmäßigkeit.

$f_1(x) = e^{2x}$ $f_2(x) = e^{3x}$ $f_3(x) = e^{0,5x}$ $f_4(x) = e^{-x}$ $f_5(x) = e^{-2x}$

$f_6(x) = e^{x^2}$ $f_7(x) = e^{3x^2+4x}$.

Bilden Sie die Ableitungen der verketteten Funktionen. Wenden Sie dabei die von Ihnen vermutete Gesetzmäßigkeit an. Überprüfen Sie anschließend mit dem CAS.

Funktionsgleichung	**Meine Ableitung**	**Ergebnis der CAS-Überprüfung**
$g_1(x) = e^{4x}$		
$g_2(x) = e^{4x^2}$		
$g_3(x) = e^{-x^2+2x}$		
$g_4(x) = \sqrt{2x^2+3x}$		

Tabelle 2b: Ein Beispiel zur systematischen Variation mit CAS

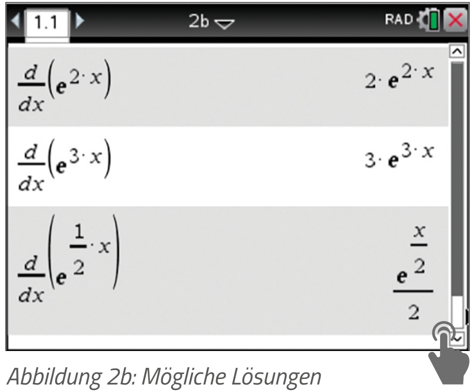


Abbildung 2b: Mögliche Lösungen

Die Kraft von Visualisierungen lässt sich anhand des Funktionenplotters verdeutlichen, siehe Tabelle 2c. So kann etwa ein Schieberegler die Auswirkungen der Variation eines Parameters bei der Funktion *f* auf den Funktionsgraphen verdeutlichen, siehe Abbildung 2c.

Aufgabenstellung für Funktionenplotter:
a) Stelle die Graphen von $y=(x-a)^2$ mit geeignetem a dar. Verändere a mit dem Schieberegler
b) Beschreibe deine Entdeckungen und formuliere eine Gesetzmäßigkeit.
c) Verändere nun den Exponenten $n=2$ und untersuche zum Beispiel die Funktionen $y=(x-a)^3$ und $y=(x-a)^{-1}$. Halte deine Ergebnisse fest. Tipp: Nutze einen Schieberegler.

Tabelle 2c: Visualisierungen mit einem Funktionenplotter

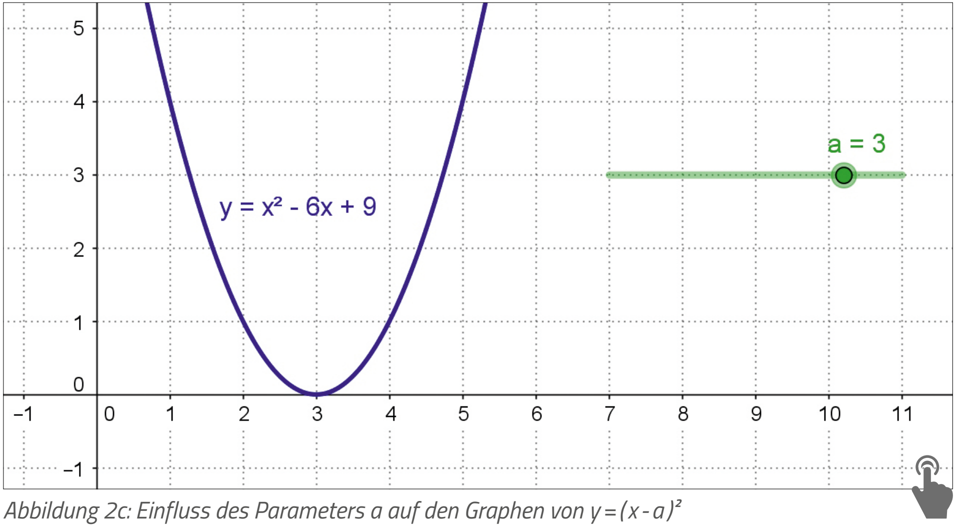


Abbildung 2c: Einfluss des Parameters a auf den Graphen von $y=(x-a)^2$

Die Vorteile des Werkzeugs liegen in der dynamischen Visualisierung. Durch den Einsatz des Funktionenplotters wird die Veränderung des Parameters a sofort in den Funktionsgraphen umgesetzt, und die Schülerinnen und Schüler können entdecken, was passiert, wenn sie den Schieberegler nach rechts oder links ziehen. Der Aufgabenteil c) erfordert eine höhere Werkzeugkompetenz, ein Begriff, der zunächst noch geklärt werden muss.

VORLIEGENDE DATEIEN

2a_multirepsys.ggb
www.geogebra.org/m/eYrn45MX

2a_multirepsys.tns
www.mnu.de/weko/2a_multirepsys.tns

2b_systematische-variation.ggb
www.geogebra.org/m/E93ncnyP

2b_systematische-variation.tns
www.mnu.de/weko/2b_systematische-variation.tns

2c_funktionenplotter.ggb
www.geogebra.org/m/mB9V5psy

2c_funktionenplotter.tns
www.mnu.de/weko/2c_funktionenplotter.tns

3. Werkzeugkompetenzen

3.1 Begriffsklärung

Die für den Begriff der Kompetenz im didaktischen Bereich derzeit gängige Definition stammt von Weinert. Kompetenzen sind bei ihm *„die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können."* (Weinert 2001, S. 27f).

Die EU formuliert: *„Mathematische Kompetenz ist die Fähigkeit, mathematisches Denken zu entwickeln und anzuwenden, um Probleme in Alltagssituationen zu lösen. Ausgehend von guten Rechenkenntnissen liegt der Schwerpunkt sowohl auf Verfahren und Aktivität als auch auf Wissen."* (Europäisches Parlament, Rat der Europäischen Union 2006)

Bemerkenswert ist hier die explizite Erwähnung der Gleichwertigkeit von Verfahren und von Wissen.

Die Begrifflichkeit der mathematischen Kompetenzen ist dann in der didaktischen Diskussion weiter durch die Bildungsstandards der KMK geprägt worden. Insbesondere wird in den Bildungsstandards zur allgemeinen Hochschulreife und für den mittleren Schulabschluss zwischen allgemeinen mathematischen Kompetenzen und mathematischen Leitideen unterschieden. Tabelle 3.1a stellt die jeweiligen Kompetenzen und Leitideen der Bildungsstandards nebeneinander und verdeutlicht, dass prozessbezogene Kompetenzen und Inhalte nicht zu trennen sind. Digitale Werkzeuge werden für alle prozessbezogenen Kompetenzen sowie für alle mathematischen Inhaltsbereiche genutzt.

Hieraus folgt, dass für uns Werkzeugkompetenz bedeutet, kompetent Mathematik zu betreiben und nicht nur kompetent Geräte zu bedienen.

Zum Werkzeugeinsatz gibt es in den KMK-Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife einen eigenen Abschnitt. Dieser hat Bedeutung für alle Länder, weshalb er hier in Gänze wiedergegeben wird:

„Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen wird durch den sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützt. Das Potenzial dieser Werkzeuge entfaltet sich im Mathematikunterricht:

- *beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge, insbesondere durch interaktive Erkundungen beim Modellieren und Problemlösen,*
- *durch Verständnisförderung für mathematische Zusammenhänge, nicht zuletzt mittels vielfältiger Darstellungsmöglichkeiten,*
- *mit der Reduktion schematischer Abläufe und der Verarbeitung größerer Datenmengen,*
- *durch die Unterstützung individueller Präferenzen und Zugänge beim Bearbeiten von Aufgaben einschließlich der reflektierten Nutzung von Kontrollmöglichkeiten.*

Bildungsstandards Mittlerer Schulabschluss (KMK 2003)	Bildungsstandards Allgemeine Hochschulreife (KMK 2012)
Allgemeine mathematische Kompetenzen im Fach Mathematik: • Mathematisch argumentieren • Probleme mathematisch lösen • Mathematisch modellieren • Mathematische Darstellungen verwenden • Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen • Kommunizieren	**Allgemeine mathematische Kompetenzen im Fach Mathematik:** • Mathematisch argumentieren • Probleme mathematisch lösen • Mathematisch modellieren • Mathematische Darstellungen verwenden • Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen • Mathematisch kommunizieren
Mathematische Leitideen: • Zahl • Messen • Raum und Form • Funktionaler Zusammenhang • Daten und Zufall	**Mathematische Leitideen:** • Algorithmus und Zahl • Messen • Raum und Form • Funktionaler Zusammenhang • Daten und Zufall

Tabelle 3.1a: Allgemeine mathematische Kompetenzen und Mathematische Leitideen im Sinne der Bildungsstandards im Überblick.

Einer durchgängigen Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge im Unterricht folgt dann auch deren Einsatz in der Prüfung." (KMK 2012)

Wie oben bereits hervorgehoben, ist für uns die Betonung des Werkzeugcharakters digitaler Medien im Mathematikunterricht ein wichtiges Merkmal. Diese Werkzeuge werden im Mathematikunterricht nicht um ihrer selbst willen eingesetzt, sondern um kompetent Mathematik zu betreiben. Wir haben für uns die Frage, was im Fach Mathematik unter Werkzeugkompetenzen zu verstehen ist, so beantwortet (Tabelle 3.1b).

Werkzeugkompetenz bedeutet, mit Werkzeugen kompetent Mathematik zu betreiben.

Tabelle 3.1b: Definition Werkzeugkompetenz

Diese allgemeine Charakterisierung von Werkzeugkompetenz soll die Bedeutung der Mathematik selbst hervorheben, für deren besseres Verständnis Werkzeuge zielgerichtet eingesetzt werden sollen. Aus der obigen Charakterisierung lassen sich auch insbesondere die folgenden Fragen ableiten, die wir im Rahmen dieser Handreichung beantworten möchten und die damit einen Beitrag für die Diskussion um die Frage sein sollen, was Werkzeugkompetenzen ausmacht.

- *Was müssen Schülerinnen und Schüler können, um im obigen Sinne über angemessene Werkzeugkompetenzen zu verfügen?*

  Im Rahmen dieser Handreichung stellen wir vier Aspekte heraus, die allesamt unabdingbar sind, wenn Schülerinnen und Schüler in kompetenter Weise mit digitalen Werkzeugen arbeiten.
  Die (Teil-)Kompetenzen sind:

  - ein passendes Werkzeug je nach Situation in angemessener und zielgerichteter Weise auszuwählen (*Kapitel 3.2*),
  - das genutzte Werkzeug zu bedienen (*Kapitel 3.2*),
  - das Potential, die Grenzen und den jeweiligen Nutzen des Werkzeugs kritisch zu reflektieren (*Kapitel 3.3*) und
  - die Bearbeitungsprozesse und die Ergebnisse in angemessener Weise zu dokumentieren (*Kapitel 3.3* und *6*).

In diesem Sinne konkretisieren wir unser Verständnis von Werkzeugkompetenz in den folgenden Kapiteln.

- *Was sind Beispiele für Lernumgebungen, bei denen Werkzeugkompetenz in diesem Sinne erforderlich ist und gefördert wird?*

  Neben der weiteren systematischen Konkretisierung der Frage, was digitale Werkzeugkompetenzen sind, geben wir im Rahmen dieser Handreichung praxistaugliche Beispiele für Lernumgebungen, die digitalen Werkzeugkompetenzen von Schülerinnen und Schülern fördern (siehe *Kapitel 5* und das digitale Zusatzmaterial in Form von ggb- und tns-Dateien).

- *Wie lässt sich Werkzeugkompetenz in diesem Sinne systematisch aufbauen im Rahmen eines konsistenten Curriculums?*

  Neben den Beispielen in *Kapitel 5* veranschaulichen wir entlang eines exemplarischen Curriculums, wie digitale Werkzeugkompetenzen in unterschiedlichen mathematischen Gegenstandsbereichen in verschiedenen Jahrgangsstufen sukzessive aufgebaut werden können (siehe *Kapitel 5*).

Auf diese Weise bieten wir im Rahmen dieser Handreichung aus drei verschiedenen Perspektiven Vorschläge,

- was wir unter digitaler Werkzeugkompetenz verstehen,
- wie sich diese systematisch in ein mathematisches Curriculum integrieren lässt und
- was praxistaugliche Beispiele für die Förderung von Werkzeugkompetenzen sein können.

Werkzeugkompetenzen liegen so verstanden quer zu den inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzbereichen in Kernlehrplänen und Bildungsstandards, und sie können bei allen drei Grunderfahrungen nach Winter eine wesentliche Rolle spielen.

In unseren Beispielen wollen wir deshalb in *Kapitel 5* die Rolle der digitalen Werkzeuge mit Bezug auf die Grunderfahrungen von Winter verdeutlichen.

3.2 Auswahl und Bedienung

Unter Bedienkompetenz werden im Folgenden all diejenigen Fähigkeiten und Fertigkeiten verstanden, die zur Bedienung des jeweiligen digitalen Werkzeugs benötigt werden. Bei Konstruktionen mit DGS umfassen diese Kompetenzen etwa die Erstellung von Punkten, Strecken und Geraden, Kreisen, Vielecken, die Verwendung von Spur und Ortslinie, den Einsatz von Abbildungen, das Messen von Längen, Flächen und Winkeln.

Beim Lösen einer quadratischen Gleichung unter Einsatz eines CAS kann dies etwa – je nach Werkzeug – die Kenntnis der Syntax, zum Beispiel des Löse-Befehls, umfassen. Je nach Werkzeug und Problemsituation sind spezifische Bedienkompetenzen erforderlich. So müssen die Schülerinnen und Schüler bei DGS wissen, dass Schnittpunkte von Linien nicht automatisch da sind, wo sich die Linien anscheinend schneiden, sondern durch einen entsprechenden Befehl als Objekt erzeugt werden müssen. Bei der Tabellenkalkulation müssen Schülerinnen und Schüler z. B. den Unterschied zwischen relativer und absoluter Adressierung kennen und nutzen können.

Eine Geometrie-Konstruktion, ein Tabellenkalkulationsblatt, eine Folge von CAS Befehlen ergeben noch keine Lernumgebung. Damit daraus ein dynamisches Schülerarbeitsblatt entsteht, bedarf es sorgfältiger Überlegungen zum Vorwissen der Schülerinnen und Schüler, zur Zielanalyse und zu sinnvollen (nicht zu großen und nicht zu kleinen) Zwischenschritten.

Auswahlkompetenz meint dagegen die Möglichkeit, je nach gegebener Problemsituation ein passendes digitales Werkzeug auszuwählen. Das Beispiel zur Bestimmung von Nullstellen, siehe Abbildung 3.2a, zeigt etwa, dass hierfür ganz unterschiedliche Werkzeuge zum Einsatz kommen können. Manchmal kann es sich anbieten, Applets im Rahmen des Unterrichtsgangs zu nutzen. Das Angebot an digitalen Werkzeugen wird so für die Schülerinnen und Schüler durch eine geeignete Vorauswahl eingeschränkt – im Anhang etwa bei den Symmetriebetrachtungen (siehe *Kapitel 5.1*), bei der mit Hilfe von DGS faszinierende Phänomene durch die Schülerinnen und Schüler erkundet werden können. In vielen Situationen hingegen kann es sich anbieten, die Vorauswahl an digitalen Werkzeugen nicht zu beschränken, etwa um eine Bearbeitungsvielfalt und damit unterschiedliche Problemlöseprozesse bewusst zu initiieren.

Anhand des Beispiels der Nullstellenbestimmung der Funktion f mit $f(x)=x^2+1{,}1x-6{,}2$, siehe Abbildung 3.2a, wird dargestellt, welche Bedeutung jeweils Auswahl- und Bedienkompetenzen für den Umgang mit digitalen Werkzeugen zukommen. Dabei soll einerseits deutlich werden, was genau unter diesen beiden Kompetenzdimensionen verstanden werden kann. Weiterhin wird hier sichtbar, inwiefern Auswahl- und Bedienkompetenz sehr eng miteinander zusammenhängen. Es ist für uns eine zentrale Überzeugung, dass Werkzeugkompetenz selbst weitaus mehr umfasst als die reine Bedienung von Werkzeugen. Wir nutzen hier in unserem Beispiel die Funktionalität des Multirepräsentationssystems GeoGebra.

Die Nullstellen der Funktion f lassen sich auf vielfältige Weise und mit jeweils unterschiedlichen digitalen Werkzeugen bestimmen. Je nach Wahl des Werkzeugs treten immer auch spezifische Merkmale der funktionalen Betrachtungen in den Vordergrund.

Eine erste Variante ist besteht darin, den Graphen der quadratischen Funktion zu visualisieren. Die Nullstelle $x=2$ lässt sich aus dem Graphen recht exakt ablesen, während man bei der anderen Nullstelle zunächst ungefähr sagen kann, dass sie irgendwo ziemlich mittig zwischen -4 und -2 liegt, ohne sie jedoch genau ablesen zu können. Mit dem Zoomwerkzeug könnten die Nullstellen genauer, aber dennoch nicht exakt bestimmt werden. Wenn die Schülerinnen und Schüler den Grafik-Modus auswählen, dann werden bei dieser Aufgabe die Schnittpunkte mit der x-Achse betont.

GeoGebra liefert mit dem Befehl „Nullstelle [$f(x)$]" die Punkte $A(-3{,}1|0)$ und $B(2|0)$, insofern sind die Nullstellen $x_1=-3{,}1$ und $x_2=2$. Diese Nullstellen werden numerisch berechnet.

Wählen die Schülerinnen und Schüler dagegen ein CAS zur Bestimmung der Nullstellen, so lässt sich die Aufgabe auch mit diesem digitalen Werkzeug auf unterschiedliche Weise lösen. So liefert das CAS in diesem Fall mit dem Befehl „Löse [$f(x)=0,\ x$]" direkt die Lösungs-

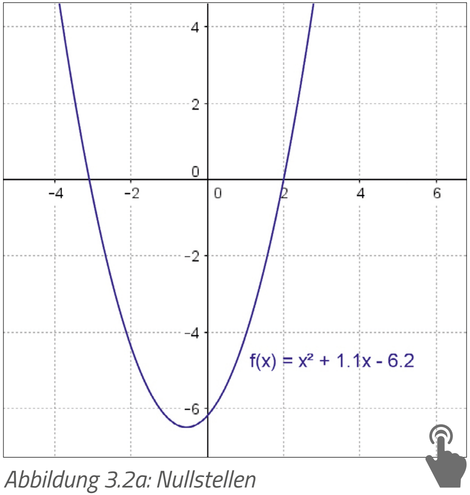


Abbildung 3.2a: Nullstellen

menge $\{x=2,\ x=-3{,}1\}$. Eine andere Möglichkeit der Nullstellenbestimmung liefert das CAS mit dem Befehl „Faktorisiere ($f(x)$)", indem es den Term $(x+3{,}1)(x-2)$ ermittelt. Auch hier lassen sich direkt die beiden Nullstellen ablesen. Darüber hinaus lassen sich hier zusätzlich die Vielfachheiten der jeweiligen Nullstellen ablesen (in diesem Falle beide Eins) und so weitergehende (hier nicht geforderte) Entdeckungen zu machen. Die Zusammenhänge zu Vielfachheiten sind insbesondere bei Potenzfunktionen höherer Ordnung allein mit Hilfe grafischer Werkzeuge im Allgemeinen nicht zu ermitteln. Je nach Interesse im Rahmen des Problembearbeitungsprozesses wählen die Schülerinnen und Schüler daher ein passendes Werkzeug aus. Außerdem ermöglicht das CAS eine erweiterte Fragestellung, z. B. für welche Werte die Funktionenschar ganzzahlige Nullstellen liefert.

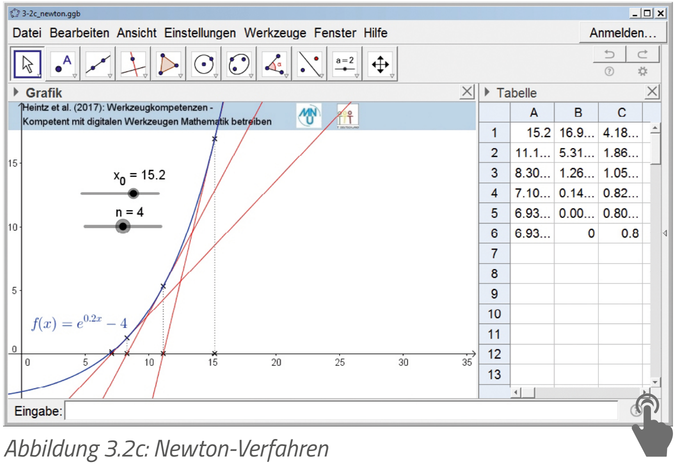
Ebenso lässt sich eine Tabellenkalkulationssoftware (TK) zur Bestimmung der Nullstellen nutzen. Mit Hilfe einer Wertetabelle über eine festgelegte Intervallgröße und den entsprechenden Funktionswerten lassen sich wichtige Eigenschaften der Funktion erkunden. In Abbildung 3.2b reicht die Schrittlänge von Eins nicht, um die (rationale) Nullstellen direkt zu erhalten. In diesen Fällen kann die tabellarische Betrachtung aber erste Hinweise auf die Existenz einer Nullstelle und ihre Lage geben.

So gesehen kann die Nullstellenbestimmung entweder mit drei kleineren Programmen geschehen oder mit unterschiedlichen Werkzeugen der Multirepräsentationsprogramme wie oben, die die Schülerinnen und Schüler auswählen.

Tabelle

	A	B	C	D
1	-5	13.3		
2	-4	5.4		
3	-3	-0.5		
4	-2	-4.4		
5	-1	-6.3		
6	0	-6.2		
7	1	-4.1		
8	2	0		
9	3	6.1		
10	4	14.2		
11	5	24.3		
12				

Abbildung 3.2b: Nutzung einer Tabellenkalkulation



	A	B	C
1	15.2	16.9...	4.18...
2	11.1...	5.31...	1.86...
3	8.30...	1.26...	1.05...
4	7.10...	0.14...	0.82...
5	6.93...	0.00...	0.80...
6	6.93...	0	0.8
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			

Abbildung 3.2c: Newton-Verfahren

Die digitalen Repräsentationswerkzeuge entfalten ihre Stärke aber erst dann ganz, wenn mehrere Darstellungsformen miteinander verbunden werden und nicht, wenn wie oben einzelne Zugänge einzeln bearbeitet werden.

Ein typisches Beispiel für die Verknüpfung unterschiedlicher Darstellungsformen liefert das Newton-Verfahren (Abbildung 3.2c). Dessen algorithmische Funktionsweise erfahren die Schülerinnen und Schüler durch die dynamische Visualisierung und können so die Funktionsweise und Leistungsfähigkeit des Algorithmus erkennen. Die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens zum Finden der Nullstelle wird insbesondere in der tabellarischen Darstellungsform sichtbar.

Ein weiteres typisches Beispiel für die Verknüpfung unterschiedlicher Darstellungsformen liefert die Einführung in die quadratischen Funktionen in *Kapitel 5.9*. Hier entdecken die Lernenden das mathematische Konzept quadratischer Abhängigkeiten auf unterschiedlichen Repräsentationsebenen, Geometrie, Funktionen und Tabelle (Abbildung 3.2d).

Deutlich wird in diesem Zusammenhang, dass je nach Wahl des digitalen Werkzeugs unterschiedliche Aspekte der funktionalen Betrachtung im Vordergrund stehen und dass jedes einzelne digitale Werkzeug seine unterschiedlichen Stärken und Eigenschaften hat.

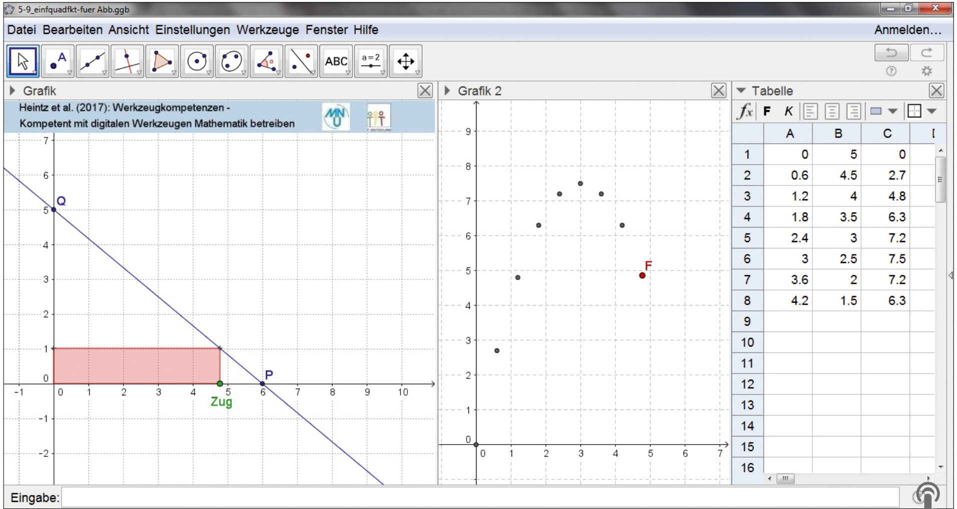


Abbildung 3.2d: Einführung quadratische Funktionen

Um das jeweils angemessene Werkzeug allerdings in kompetenter Weise auswählen zu können, müssen die Schülerinnen und Schüler es hinreichend gut bedienen können, ansonsten ist die jeweilige Wahl zwecklos.

Insofern bedingen sich Bedien- und Auswahlkompetenz: Die kompetente Auswahl des passenden Werkzeuges setzt ein Mindestmaß an Bedienkompetenz der zur Verfügung stehenden Werkzeuge voraus.

VORLIEGENDE DATEIEN

3-2a_nullstellen.ggb
www.geogebra.org/m/tG3cDgfH

3-2a_nullstellen.tns
www.mnu.de/weko/3-2a_nullstellen.tns

3-2c_newton.ggb
www.geogebra.org/m/z9M59MCp

3-2c_newton.tns
www.mnu.de/weko/3-2c_newton.tns

5-9_einfQuadFkt.ggb
www.geogebra.org/m/VqfJuq32

5-9_einfQuadFkt.tns
www.mnu.de/weko/5-9_einfQuadFkt.tns

3.3 Dokumentation und Reflexion

Für einen kompetenten Umgang mit digitalen Werkzeugen ist es neben der angemessenen Auswahl und der entsprechenden Bedienung eine wesentliche Teilkompetenz, den jeweiligen Nutzen aber auch die Grenzen des Werkzeugs zu kennen und zu reflektieren. Aus unserem Verständnis, dass Werkzeugkompetenz meint, in kompetenter Weise Mathematik zu betreiben, ergibt sich auch die Notwendigkeit, die Zielführung und den jeweiligen Nutzen des digitalen Werkzeugs beim Mathematiklernen kritisch einschätzen zu können. Dies ist in verschiedenen Situationen wichtig im Mathematikunterricht.

Einerseits sollten die Lernenden ein Bewusstsein darüber entwickeln, dass ein digitales Werkzeug nicht auf alle Fragen im Mathematikunterricht eine Antwort geben kann. Eine Beurteilung mathematischer Zusammenhänge und Strukturen etwa kann ein digitales Werkzeug nicht übernehmen. So lassen sich beispielsweise unterschiedliche quadratische Funktionsgraphen visualisieren und es lassen sich qualitative Aussagen erschließen, etwa so: *„Je größer der Parameter, desto weiter verschiebt sich der Hochpunkt nach links“*. Wie allerdings der Einfluss der Parameter auf die entsprechenden Graphen genau ist, wird durch die reine Visualisierung nur schwer erschlossen. Vielmehr ist die Begriffsbildung ein (langwieriger) Prozess, den Schülerinnen und Schüler hier – zwar mit Unterstützung durch das digitale Werkzeug, aber letztlich kognitiv – zu bewältigen haben. Eine kognitive Aktivierung wird in solchen Situationen nicht trotz, sondern gerade wegen der Nutzung digitaler Werkzeuge erzeugt, weil beurteilende Aspekte der mathematischen Begriffsbildung etwa durch die Nutzung unterschiedlicher Repräsentationsformen eine stärkere Rolle spielen.

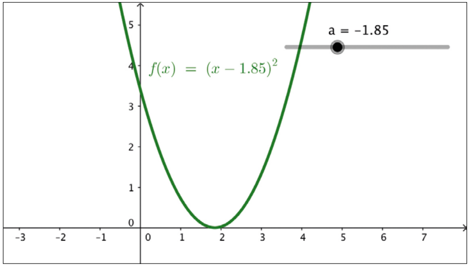
Weiterhin steigt durch die Nutzung digitaler Werkzeuge die Möglichkeit, komplexe Rechenoperationen an den Rechner abzugeben. Dabei gewinnt die Frage nach rechnerfreien Fertigkeiten, die die Lernenden beherrschen müssen, eine ebenso wichtige Bedeutung. Wir meinen, dass Schülerinnen und Schüler in einem Mathematikunterricht, in dem Werkzeuge sinnvoll verwendet werden, auch grundlegende Rechenfertigkeiten im Kopf durchführen können müssen. So gehört es zu einer wesentlichen (allgemeinen) mathematischen Kompetenz, Abschätzungen (etwa durch Überschlag) vornehmen zu können, ein Gespür für Größen und Mengen zu bekommen oder etwa Zahlen systematisch darzustellen und zu ordnen. Wir betonen, dass in einem Mathematikunterricht, der digitale Werkzeuge in didaktisch sinnvoller Weise einsetzt, solche Inhalte in vielfältigen Situationen im Kopf und per Hand bearbeitet werden können müssen.

Andererseits ist mit der in Abschnitt 3.2 thematisierten Auswahlkompetenz auch die Notwendigkeit der Reflexion über die jeweiligen Potenziale und Grenzen des Werkzeugs verbunden. So lassen sich etwa Wertetabellen nutzen, um die Symmetrie funktionaler Zusammenhänge auf numerischer Basis zu erkunden und bestimmte Werte (wie z.B. Nullstellen) direkt bestimmen zu können. In diesem Sinne bieten unterschiedliche Repräsentationsformen spezifische Zugänge zu mathematischen Begriffen (Bruner 1971). Damit direkt verbunden sind dann auch die jeweiligen Potentiale und Grenzen.

Nicht nur in Reflexionsphasen ist die Dokumentation von Ergebnissen und Bearbeitungswegen im Mathematikunterricht von ganz wesentlicher Bedeutung; die mathematischen Kompetenzen an sich entwickeln sich im Unterricht ständig weiter, damit auch die Fähigkeit, über die mathematischen Zusammenhänge zu kommunizieren und sie entsprechend zu dokumentieren.

In ☛ *Kapitel 6* werden wir ausführlich unterschiedliche Situationen im Mathematikunterricht beschreiben, in denen die Lernenden über Mathematik kommunizieren. Wir stellen für Lernsituationen (etwa zu Beginn einer Unterrichtsreihe) und Leistungssituationen (etwa in einer zentralen Prüfung) heraus, inwiefern die Lernenden die Mathematik und ihre Bearbeitungswege zum Teil sehr unterschiedlich dokumentieren.

Auftrag: Begründe, wie sich die Variation des Parameters *a* der Funktion f mit $f(x) = (x - a)^2$ auf den Graphen der Funktion auswirkt



Wie sollen wir bei der Aufgabe vorgehen?

Lass uns die Situation erst einmal graphisch darstellen, dann sehen wir es vielleicht direkt.

Ja stimmt, das sieht man direkt: Je größer der Parameter, desto weiter verschiebt sich der Hochpunkt nach links.

Wie hast du das so schnell gemacht?

Einfach den Parameter erstellen, Funktionsterm eingeben – und fertig!

Nein, ich meine nicht die Bedienung. Ich meine einfach, dass wir das doch noch gar nicht begründet haben, oder?

Gute Frage... Nein, so richtig begründet haben wir es noch nicht.

Ich glaub ich hab's: Schau dir den Funktionsterm doch noch einmal an – da sieht man es am besten dran...

Abbildung 3.3: Reflexions-, Auswahl- und Bedienungsebene in einem Schülerdialog

4. Sukzessiver Aufbau von digitalen Werkzeugkompetenzen in der Praxis

In diesem Kapitel werden die Ideen für ein Medienkonzept in der Schule entwickelt werden (Bezüge zu KMK Standards). Der erste Abschnitt stellt einen möglichen Rahmen für eine schulinterne Konzeption zur systematischen Nutzung digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht dar. Im zweiten Abschnitt wird ein konkretes Medienkonzept vorgestellt.

4.1 Werkzeugkompetenzen in curricularer Perspektive

Werkzeugkompetenz kann nur sukzessive aufgebaut werden. Wir beschreiben in Anlehnung an die in NRW gültigen Kernlehrpläne Kompetenzerwartungen am Ende der Jahrgangsstufe 6, 8, 10 und 12.

Die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss fordern im Rahmen der Kompetenz *„Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“* (K5) u.a., dass die Lernenden *„Werkzeuge (wie Formelsammlungen, Taschenrechner, Software) in Situationen nutzen, in denen ihr Einsatz geübt wurde“*, und *„mathematische Werkzeuge verständig auswählen und einsetzen.“* (KMK 2003, S. 15)

Daraus lässt sich ableiten, dass der Aufbau von Werkzeugkompetenz bereits in der Sekundarstufe I so angelegt sein muss, dass Vor- und Nachteile sowie Möglichkeiten und Grenzen der unterschiedlichen Werkzeuge reflektiert werden, weil die Schülerinnen und Schüler nur so in Umgang und Auswahl der digitalen Werkzeuge handlungs- und entscheidungsfähig werden.

Die Schülerinnen und Schüler sollen *„mit Variablen, Termen, Gleichungen, Funktionen, Tabellen und Diagrammen arbeiten (...) und Möglichkeiten und Grenzen der Nutzung mathematischer Werkzeuge reflektieren“* können (KMK 2003, S. 15).

Die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (KMK 2012, S. 12–13) gehen weiter und skizzieren die Zielvorstellung beim Aufbau von digitalen Werkzeugkompetenzen noch präziser, indem sie etwa die Potentiale digitaler Werkzeuge für Modellierungs- und Problemlöseaktivitäten oder die vielfältigen Darstellungsmöglichkeiten sowie die damit verbundenen unterschiedlichen Zugänge zu mathematischen Problemstellungen betonen. Die in den Bildungsstandards beschriebenen Kompetenzen liefern in diesem Sinne zwar wichtige Anhaltspunkte für den intendierten Aufbau von digitaler Werkzeugkompetenz, müssen für die Umsetzung in einem schulinternen Curriculum oder im konkreten Unterricht noch ergänzt und weiter ausdifferenziert werden.

Um die Werkzeugkompetenz in einem schulinternen Curriculum zu verankern, sollten unabhängig von den jeweiligen fachlichen Inhalten folgende allgemeine Aspekte beachtet werden, die für alle Jahrgangsstufen gültig sind:

1. Gemäß des Dictums ‚Köpfchen statt Knöpfchen' darf nicht das Erlernen der Funktionsweise eines Programms oder eines Geräts im Vordergrund stehen, sondern das, was man mit dem Programm oder dem Gerät machen kann. Daher sollen nach Möglichkeit nur wenige digitale Werkzeuge (im besten Fall nur ein einziges) verwendet werden. Ein wichtiges Gütekriterium für die Auswahl des digitalen Werkzeugs ist seine intuitive Bedienung.

2. Bei jedem Einsatz von digitalen Werkzeugen soll die Frage im Vordergrund stehen, ob es Mathematik fördert oder ggf. sogar verhindert, etwa dadurch, dass die Lernenden dazu eingeladen werden, bei den Phänomenen stehen zu bleiben. Wie jedes Werkzeug müssen auch digitale Werkzeuge sinnvoll eingesetzt werden. Mit einem nichtsachgemäßem Einsatz kann man auch Schaden anrichten.

3. Die Medienkompetenz wird Schritt für Schritt aufgebaut. Zunächst lernen die Lernenden das digitale Werkzeug kennen, dann können sie es erst unter Anleitung, später selbstständig bedienen, schließlich setzen sie es gezielt und reflektiert als Werkzeug ein.

4. Mathematikprogramme sollen mit Methode eingesetzt werden. Das bedeutet einerseits, dass Computer- oder Taschenrechnereinsatz selbst noch keine Methode ist, sondern die Frage nach einem passenden methodischen Arrangement aufwirft. Andererseits bedeutet es, dass digitale Werkzeuge sehr unterschiedlich eingesetzt werden können und je nach Zielsetzung die passende Einsatzmöglichkeit (dynamische Arbeitsblätter, Arbeit vom leeren Bildschirm aus, dynamische Visualisierung, Exploration, heuristisches Werkzeug, Rechenknecht, Kontrollinstanz, Simulation, Modell, Präsentation, Lehrervortrag ...) ausgewählt werden muss.

5. Digitale Werkzeuge sollen unterschiedliche Zugänge unterstützen (numerische, algebraische und geometrische) und Einsichten ermöglichen, wie die unterschiedlichen Zugänge zusammenhängen.

6. Digitale Werkzeuge existieren nicht als Selbstzweck sondern als Mittler im Mathematikunterricht. Sie verbinden die Kompetenzbereiche Kommunizieren, Argumentieren, Problemlösen und Begriffslernen. (Barzel 2005, 2015, Duval 2002)

7. Digitale Werkzeuge ersetzen nicht händisches Rechnen. Dort, wo sie den Lernenden das Rechnen abnehmen, sollten diese in der Regel über sichere Kompetenzen in den entsprechenden Rechnungen verfügen. Überschlagsrechnungen gehören z. B. immer zum Werkzeugeinsatz dazu.
   Gleichwohl werden mit digitalen Werkzeugen auch Rechnungen ausgeführt, die händisch nicht oder nur schwer machbar sind wie z. B. umfangreiche stochastische Simulationen oder das Invertieren einer 4x4-Matrix.

8. Digitale Werkzeuge leisten einen wichtigen Beitrag im Bereich von Lernkompetenzen. (Elschenbroich & Heintz 2008)

4.2 Beispiel für die Integration in ein Medienkonzept in der Schule

Im Folgenden konkretisieren wir die in ☛ *Kapitel 2* formulierten Werkzeugkompetenzen entlang eines beispielhaften Curriculums (Tabelle 4.2). Hier formulieren wir digitale Kompetenzerwartungen für die unterschiedlichen Jahrgangsstufen.

Dabei unterscheiden wir zwei verschiedene Ebenen:
Auf der Ebene der allgemeinen Kompetenzerwartungen konkretisieren wir die in ☛ *Kapitel 2* systematisch formulierten Werkzeugkompetenzen für die unterschiedlichen Jahrgangsstufen. Demgegenüber beschreiben die jeweiligen Unterrichtsgegenstände, wie sich die allgemeinen Kompetenzerwartungen für die verschiedenen Jahrgangsstufen entlang mathematischer Gegenstandsbereiche manifestieren können. Ein schulinternes Curriculum, das den Aufbau digitaler Werkzeugkompetenzen konsequent mit in den Blick nimmt, sollte in diesem Sinne beide Ebenen transparent machen. In ☛ *Kapitel 5* dieser Handreichung geben wir schließlich konkrete Unterrichtsbeispiele und Aufgaben, die die hier formulierten Kompetenzerwartungen fördern können.

Allgemeine Kompetenzerwartungen	**Unterrichtsgegenstände**
Klasse 5/6	**Klasse 5/6**
Die Lernenden... • arbeiten in vorbereiteten Lernumgebungen (ggf. mit eingeschränkter Werkzeugleiste), • variieren zielgerichtet geometrische Situationen, z. B. mit Hilfe des Zugmodus, • beschreiben Phänomene beim gezielten Erkunden im Zugmodus, • nutzen die Phänomene als Ausgangspunkt für mathematische Argumentation, • können Daten mit einer Tabellenkalkulation darstellen, • wählen geeignete Bildausschnitte für ihre Erkundungen.	Digitale Werkzeuge werden benutzt, um mathematische Begriffe zu erkunden. 1. Erkunden elementargeometrischer Begriffe - digitale Werkzeuge als Black Box 2. Erkunden von (Achsen-)Symmetrie (siehe ☛ *Kapitel 5.1*) 3. Erkunden von Eigenschaften besonderer Vierecke (siehe ☛ *Kapitel 5.4*) 4. Erste Erfahrungen im Koordinatensystem 5. Aufbau von Grundvorstellungen zum Flächenvergleich und zur Flächenberechnung 6. Aufbau von Raumvorstellung: 7. Dynamische Visualisierung von Körpern und ihren Netzen In Klasse 6 werden digitale Werkzeuge eingesetzt, um verschiedene Darstellungen zu verbinden; der Schwerpunkt liegt auf dem Vernetzen, inhaltlich liegen die Schwerpunkte bei folgenden Themen: 1. Geometrisierung der Bruchrechnung und Automatisierung der Rechenverfahren 2. Datenanalyse

Tabelle 4.2: Erwartungen an die digitale Werkzeugkompetenz am Ende der Jahrgangsstufen 6, 8, 9 und 12

> Fortsetzung der Tabelle auf nächster Seite

Allgemeine Kompetenzerwartungen	Unterrichtsgegenstände
Klasse 7/8 Die Lernenden... • nutzen digitale Werkzeuge als Kontrollinstanz, • stellen Funktionsgraphen mit digitalen Werkzeugen dar (z. B. mit einem Funktionenplotter) und wählen ein passendes Koordinatensystem, • wechseln unter Anleitung die Darstellungsform (Tabelle, Graph, Term), • verwenden Simulation zur Untersuchung stochastischer Situationen, • vergleichen größere Datensätze und wählen geeignete Kenngrößen und dazu passende Darstellungsformen aus, • reflektieren über die Grenzen der unterschiedlichen Darstellungsformen und manipulieren gezielt vorgegebene Datensätze, • verwenden dynamische Geometriesoftware als heuristisches Instrument in vorbereiteten.	**Klasse 7/8** Digitale Werkzeuge werden im Rahmen der Stochastik für Simulationen genutzt. Im Zentrum der Überlegungen steht die Entwicklung stochastischen Denkens mit den Elementen Hypothese, Simulation und Experiment (siehe ☛ *Kapitel 5.6* und ☛ *Kapitel 5.7*). Beim Thema Zuordnungen werden die digitalen Werkzeuge genutzt, um die verschiedenen Darstellungen Tabelle - Graph - Algebra nebeneinanderzustellen und Zusammenhänge zu erkunden. (siehe ☛ *Kapitel 5.9*). In der Geometrie werden digitale Werkzeuge als heuristisches Instrument für geometrische Erkundungen verwendet (Problemlösen, Grunderfahrung nach H. Winter); digitale Werkzeuge sollen helfen, dem Beweisen und mathematischen Argumentieren wieder einen größeren Stellenwert zu geben. Außerdem dienen sie dem Experimentieren und dem Kontrollieren. (siehe ☛ *Kapitel 5.5*).

Tabelle 4.2: Erwartungen an die digitale Werkzeugkompetenz am Ende der Jahrgangsstufen 6, 8, 9 und 12 *> Fortsetzung der Tabelle auf nächster Seite*

Allgemeine Kompetenzerwartungen	Unterrichtsgegenstände
Klasse 9/10 Die Lernenden... • wählen in Abhängigkeit von der Problemstellung ein geeignetes Werkzeug (Stift und Papier, Tabellenkalkulation, DGS, CAS …) aus und nutzen es, • nutzen digitale Werkzeuge als ‚Rechenknecht', um sich von langwierigen und fehleranfälligen Rechnungen zu entlasten, • variieren systematisch Parameter in Funktionsdarstellungen, • nutzen digitale Werkzeuge, um grundlegende mathematische Ideen situationsangemessen zu verdeutlichen (z.B. als Funktionenmikroskop zur Einführung in die Steigung von Funktionen), • verwenden Tabellenkalkulation als heuristisches Instrument ‚vom leeren Blatt' aus (z. B. absolute und relative Zellbezüge, grundlegende Befehle, …), • manipulieren gezielt algebraische Ausdrücke (CAS), • reflektieren über die Grenzen des Werkzeugs.	**Klasse 9/10** Digitale Werkzeuge helfen, unterschiedliche Aspekte von Funktionen mit Hilfe von unterschiedlichen digitalen Werkzeugen deutlich zu machen. DGS, Tabellenkalkulation, Funktionenplotter und CAS ermöglichen jeweils spezifische Aussagen und Erkenntnisse zu quadratischen Funktionen. (siehe ☛ *Kapitel 5.9*) Darüber hinaus werden digitale Werkzeuge verwendet, um einfache Modellierungsaufgaben zu unterstützen (quadratische Funktionen, exponentielles Wachstum, siehe ☛ *Kapitel 5.9* und ☛ *Kapitel 5.11*). **Jahrgangsstufe 10 (NRW: Einführungsphase S II)** Digitale Werkzeuge werden zum Systematisieren und zum Entdecken von Strukturen eingesetzt. Außerdem werden verschiedene mathematische Darstellungen (Tabelle, Geometrie, Funktionsgraph, Algebra) zur Lösung mathematischer Probleme verwendet und kriteriengeleitet verglichen, insbesondere im Rahmen der Differenzialrechnung. (siehe ☛ *Kapitel 5.13* und ☛ *Kapitel 5.14*)

Tabelle 4.2: Erwartungen an die digitale Werkzeugkompetenz am Ende der Jahrgangsstufen 6, 8, 9 und 12 *> Fortsetzung der Tabelle auf nächster Seite*

Allgemeine Kompetenzerwartungen	Unterrichtsgegenstände
Klasse 11/12 Die Lernenden... • entscheiden, welche Möglichkeiten der digitalen Werkzeuge (z.B. Tabellenkalkulation, Graphikansicht, CAS) sie nutzen und welche nicht, • nutzen digitale Werkzeuge für die Verarbeitung großer Datenmengen oder für komplexe Rechnungen im Rahmen von Modellierungsaufgaben, • nutzen digitale Werkzeuge beim Problemlösen und beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge, insbesondere durch interaktive Erkundungen, • verknüpfen gezielt verschiedene Darstellungsmöglichkeiten und variieren mathematische Objekte bidirektional, • nutzen digitale Werkzeuge, um individuelle Zugänge zu realisieren, • nutzen digitale Werkzeuge reflektiert als Kontrollmöglichkeiten.	**Klasse 11/12** Digitale Werkzeuge werden von den Lernenden gezielt als universelles Werkzeug eingesetzt. Insbesondere werden sie zum Modellieren einfacher Probleme aus der Realität und zum Simulieren einfacher Prozesse genutzt (siehe 👉 *Kapitel 5.16* und 👉 *Kapitel 5.18*). In der Vektoriellen Geometrie werden die digitalen Werkzeuge zur Visualisierung, Unterstützung des räumlichen Vorstellungsvermögens und als heuristisches Werkzeug genutzt. Dadurch können beispielsweise lineare Gleichungen mit drei Unbekannten mit Ebenen im Raum assoziiert werden und lineare Gleichungssysteme einen verständnisorientierten Einstieg in die Vektorgeometrie liefern.

Tabelle 4.2: Erwartungen an die digitale Werkzeugkompetenz am Ende der Jahrgangsstufen 6, 8, 9 und 12

5. Beispiele für alle Jahrgangsstufen

Die Tabelle 5.1 zeigt in einer Übersicht die jeweiligen Aufgabenbeispiele zugeordnet zu den Jahrgangstufen und den Grunderfahrungen von Winter (kurz G1, G2 und G3), die schwerpunktmäßig gefördert werden.

Kapitel	Jahrgangsstufe	Aufgabe / Gegenstand	Grunderfahrung
5.1	5 – 6	Achsensymmetrie	G2
5.2	7 – 8	Satz des Thales	G2 und G3
5.3	6 – 8	Besondere Punkte im Dreieck	G2 und G3
5.4	7 – 9	Mittenviereck	G3
5.5	7 – 9	Radius gesucht – Üben und Problemlösen	G2 und G3
5.6	8 – 9	Verteilung der Körpergröße	G1 und G2
5.7	8 – 9	Fernsehverhalten von Jugendlichen (Boxplot)	G1 und G2
5.8	7 – 13	Mit Simulationen zum Hypothesentest	G1
5.9	8 – 9	Quadratische Funktionen	G1 und G2
5.10	10 – 11	Parametervariation bei Exponentialfunktionen	G2 und G3
5.11	10 – 11	Wachstum	G1

Tabelle 5.1: Übersicht zu den Aufgaben und den Grunderfahrungen nach Winter

> Fortsetzung der Tabelle auf nächster Seite

> Fortsetzung der „Tabelle 5.1: Übersicht zu den Aufgaben und den Grunderfahrungen nach Winter" von Seite 36

Kapitel	**Jahrgangsstufe**	**Aufgabe / Gegenstand**	**Grunderfahrung**
5.12	10 – 11	Ableitungsfunktion – ein handlungsorientierter Zugang	G2
5.13	10 – 11	Funktionenlupe	G2
5.14	10 – 11	Einstieg in die Differentialrechnung	G1
5.15	11 – 12	Einführung in die Integralrechnung	G1 und G2
5.16	11 – 12	Freifallturm	G1 und G2
5.17	11 – 12	Rotationskörper	G1 und G2
5.18	12 – 13	Übergangsmatrizen	G1

Die digitalen Ergänzungen zu den Aufgaben finden Sie jeweils in den jeweiligen Kapiteln. Alle GeoGebra-Dateien sind gebündelt in einem GeoGebra-Book, alle TI-Nspire-Dateien in einer Datei zusammengefasst.

VORLIEGENDE DATEIEN:

GeoGebra-Book
https://www.geogebra.org/m/GH6pmdyC

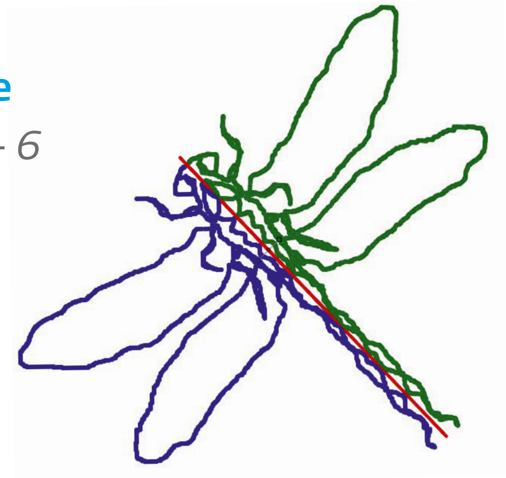
TI-Nspire Gesamt
www.mnu.de/weko/weko.zip

www.mnu.de/weko/5-1_achsensymmetrie.pdf

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt
Achsensymmetrie

5.1 Achsensymmetrie

Jahrgangsstufe 5 – 6



Symmetrie zählt zu den faszinierendsten Phänomenen in unserer Umwelt. Schon in der Grundschule nähern sich die Lernenden der Symmetrie durch Spiegel, Basteleien und Tintenkleckse. Doch wie kann man Symmetrie vertieft verstehen?

Dynamische Geometrie kann helfen, der Achsensymmetrie „auf die Spur" zu kommen.

Ein geeignetes Beispiel ist die Erzeugung einer achsensymmetrischen Figur in einem digitalen Arbeitsblatt zur Einführung der Achsensymmetrie. Dort finden die Lernenden einen beweglichen Punkt und seinen an einer versteckten Symmetrieachse gespiegelten Bildpunkt. Beide Punkte sind im Spurmodus, so dass die Bewegungen der Punkte sichtbar bleiben.

Dieses digitale Arbeitsblatt ist nicht nur gut geeignet, um konkrete Eigenschaften der Achsenspiegelung zu erkunden und zu entdecken, sondern auch für den gezielten Aufbau von digitaler Werkzeugkompetenz. So erfahren die Lernenden, dass willkürliches Ziehen des Punktes wenig hilfreich ist, während eine zielgerichtetes und systematisches Ziehen des Punktes (z. B. so, dass sich die Spuren der Punkte mehrmals treffen und so, dass eine klare, gut erkennbare Form oder Figur entsteht) wesentliche Phänomene offenlegt.

Die Schülerinnen und Schüler lernen, dass sie nicht bei den Phänomenen stehen bleiben dürfen, sondern dass die Phänomene den Ausgangspunkt bilden für die weitere mathematische Argumentation.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Aufgabe: Schöne Figuren erzeugen

In der Datei „5-1_schoene_figuren“ siehst du einen blauen Punkt, den du mit der Maus bewegen kannst, und einen orangenen Punkt, der sich immer dann bewegt, wenn der blaue Punkt bewegt wird. Damit kannst du schöne Bilder zeichnen.

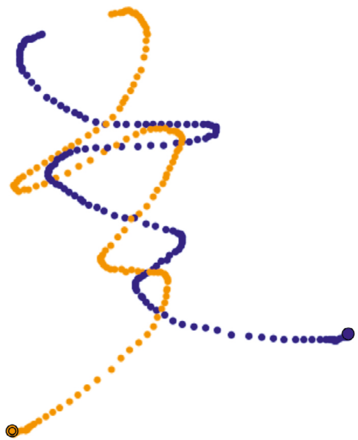


Abbildung 5.1a

- Bewege zunächst den blauen Punkt, um den Zusammenhang zwischen dem blauen und dem orangenen Punkt zu erkunden. Beschreibe deine Beobachtungen so präzise wie möglich.
- Wenn du auf „Weiter geht's“ klickst, wird für die Punkte der Spurmodus aktiviert.
- Bewege den blauen Punkt so, dass sich die beiden Punkte ein- oder mehrmals treffen.
- Im nächsten Schritt werden zusätzlich die Verbindungsstrecke der beiden Punkte sowie deren Mittelpunkt eingezeichnet.
- Zeichne mit Hilfe des blauen Punktes eine besonders schöne oder besonders lustige Figur.
- Beschreibe anschließend die gegenseitige Lage der blauen, orangenen und roten Punkte so präzise wie möglich.

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt
Achsensymmetrie

VORLIEGENDE DATEIEN

GeoGebra

5-1_schoene_figuren.ggb
www.geogebra.org/m/p9nnhUzf

TI-nspire

5-1_schoene_figuren.tns
www.mnu.de/weko/5-1_schoene-figuren.tns

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt
Achsensymmetrie

Aufgabe: Entdeckungen an einem freundlichen Löwen

In der Datei „5-1_loewe" siehst du ein Bild eines Löwen sowie eine rote Gerade, die man an zwei Punkten bewegen kann.

- Bewege die rote Gerade so, dass sie den Löwen in zwei symmetrische Hälften teilt.
- Bewege anschließend einen blauen Punkt auf einen Punkt im Löwenbild und den orangenen Punkte auf dessen Spiegelpunkt. Wiederhole diese Aktion ein oder mehrere Male. Beschreibe deine Beobachtungen möglichst präzise.
- Spiegle das Löwenbild an der roten Geraden (Werkzeug „Spiegle Objekt an Gerade") .
- Bewege den „Originallöwen" am blauen Punkt in verschiedene Richtungen. Zeichne ggf. Hilfslinien ein und beschreibe deine Beobachtungen so präzise wie möglich. Verwende dabei die richtigen Fachbegriffe (z. B. Länge, Abstand, Winkel, senkrecht, parallel,...).

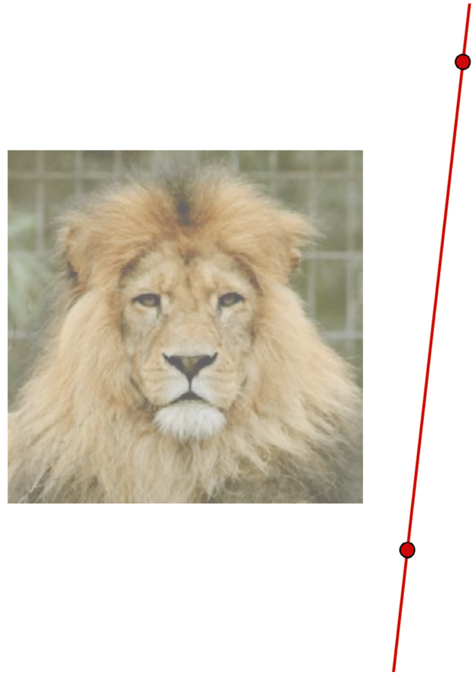


Abbildung 5.1b

VORLIEGENDE DATEIEN

5-1_loewe.ggb
www.geogebra.org/m/RM7Tyukb

5-1_loewe.tns
www.mnu.de/weko/5-1_loewe.tns

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Aufgabe: Halbe Sachen

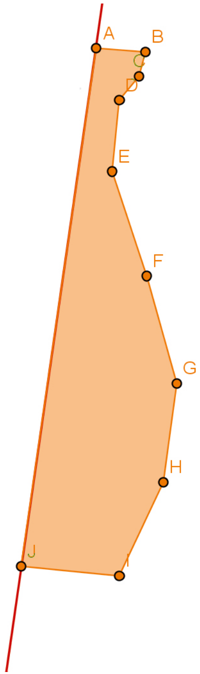


Abbildung 5.1c

In der Datei „5-1_halbe_sachen“ siehst du eine rote Gerade und ein „halbes“ Bild (eine Symmetriehälfte), das man an zehn Punkten verformen kann.

- Zeichne eine Symmetriehälfte zu vorgegebenen Begriffen.
- Dein Nachbar soll aus dem „halben“ Bild den Begriff erschließen.
- Überprüfe die Lösung, indem du die Symmetriehälfte an der roten Gerade spiegelst.

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt

Achsensymmetrie

VORLIEGENDE DATEIEN

5-1_halbe_sachen.ggb

www.geogebra.org/m/j4Tvu5bH

5-1_halbe_sachen.tns

www.mnu.de/weko/5-1_halbe-sachen.tns

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:

Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer
Achsensymmetrie

VORKENNTNISSE

Die Schülerinnen und Schüler sollten über folgende Kenntnisse verfügen:

- ***Sie verwenden die Begriffe Punkt, Gerade, Strecke, Abstand, senkrecht, parallel.***
- ***Sie verfügen über intuitive Kenntnis des Symmetriebegriffs.***

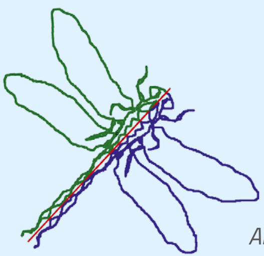


Abbildung 5.1d

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Hinweise zur Lösung

Wesentliche Erkenntnisse bei der Lösung der Aufgabe:

- der Formaspekt der Achsensymmetrie, d. h. die achsensymmetrische Figur besteht aus zwei gleichen „Hälften",
- Symmetrie ist kein innermathematisches Konstrukt, sondern begegnet uns überall in unserer Umwelt, in der Natur ebenso wie in der Kultur,
- man kann achsensymmetrische Figuren punktweise entstehen lassen, die Symmetrieachse wird bereits durch ein einziges Paar aus Punkt und Bildpunkt festgelegt,
- die Symmetrieachse ist die Mittelsenkrechte (auch wenn sie noch nicht unter diesem Namen firmiert) einer jeden Verbindungsstrecke von Punkt und Bildpunkt,
- die Symmetrieachse enthält alle Mittelpunkte der Verbindungsstrecken von Punkt und Bildpunkt,
- Punkte auf der Symmetrieachse stimmen mit ihrem Bildpunkt überein,
- alle Verbindungsstrecken von Punkt und Bildpunkt verlaufen parallel,
- Punkt und Bildpunkt haben immer denselben Abstand von der Symmetrieachse,
- die Symmetrieachse achsensymmetrischer Figuren kann eingezeichnet werden,
- Längen- und Winkeltreue werden als Eigenschaften der Achsenspiegelung erarbeitet,
- Deckungsgleichheit beider Teilfiguren wird als Kriterium für achsensymmetrische Figuren erarbeitet,
- aus einer „Symmetriehälfte" wird auf die Gesamtfigur geschlossen.

Mögliche Alternativen zur Aufgabenstellung:

Die Erkundung von Achsensymmetrie mit Hilfe von digitalen Medien kann mit klassischen Medien vorbereitet werden, z. B. durch Faltschnitte, durch Experimente mit Spiegeln oder durch Erkundungen am Geobrett.

MEHRWERT

Das digitale Werkzeug erweitert die Problemlösekompetenz durch

- systematisches Variieren, dadurch Mustererkennung in der Geometrie und
- Anwenden der Problemlösestrategie „Einzeichnen von Hilfslinien".

Das digitale Werkzeug erweitert die Kommunikationskompetenz durch

- Erläuterung mathematischer Sachverhalte in eigenen Worten (aber präzise).

WERKZEUGKOMPETENZEN

Bedienkompetenz:

- Punkt ziehen im Zugmodus
- zielgerichteter Einsatz des Spurmodus
- präzises Ausrichten von Punkten
- ggf. Messen (Längen und Winkel)
- Ausführen einer Achsenspiegelung mit Hilfe des dafür vorgesehenen Werkzeugs.

Dokumentationskompetenz:

Die Schülerinnen und Schüler notieren auf der inhaltlichen Ebene,

- dass die Gesamtheit aller Punkte und aller Spiegelpunkte eine (achsen)symmetrische Figur darstellt,
- dass ein Punkt durch Spiegelung aus dem anderen hervorgegangen ist,
- dass das Objekt, an dem gespiegelt wird, eine Gerade ist,
- dass die Verbindungslinie zwischen Punkt und Spiegelpunkt stets senkrecht zur Spiegelachse verläuft,
- dass der Abstand von einem Punkt zur Spiegelachse stets derselbe ist wie der des Spiegelpunktes zur Spiegelachse.

LITERATUR

Marianne Franke (2008): Didaktik der Geometrie: In der Grundschule. Spektrum Akademischer Verlag: Heidelberg.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

www.mnu.de/weko/5-2_thales.pdf

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt

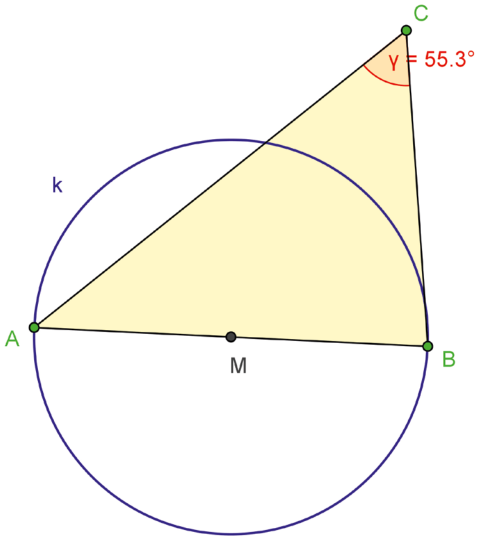
Satz des Thales

5.2 Satz des Thales

Jahrgangsstufe 7 – 8

Der Satz des Thales ist einer der wesentlichen Sätze der Schulgeometrie (neben dem Innenwinkelsummensatz und dem Satz des Pythagoras) und eine der ersten Stellen, wo Schülerinnen und Schüler einen Beweis kennenlernen können.

Dynamische Geometrie-Software hilft dabei, dass das kein lehrerzentrierter Exerzierplatz des Beweisens wird, sondern dass Schülerinnen und Schüler selbstständig die Sachverhalte rund um den Satz des Thales entdecken und begründen können.



Die Arbeitsblätter beginnen mit einem handlungsorientierten Zugang auf dem Schulhof. Danach gibt es eine Folge von dynamischen Arbeitsblättern, die sukzessive von den Phänomenen zum Satz und zum Umkehrsatz führt.

Die Schülerinnen und Schüler entdecken durch systematische Variation den Zusammenhang zwischen der Gestalt des Dreiecks ABC und dem Winkel γ und formulieren ihn präzise (Satzfindung). Mit einem passenden Arbeitsblatt können sie dann auch den Beweis für Satz und Umkehrsatz entdecken und erarbeiten.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Aufgabe 1: Auf dem Schulhof

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt

Satz des Thales

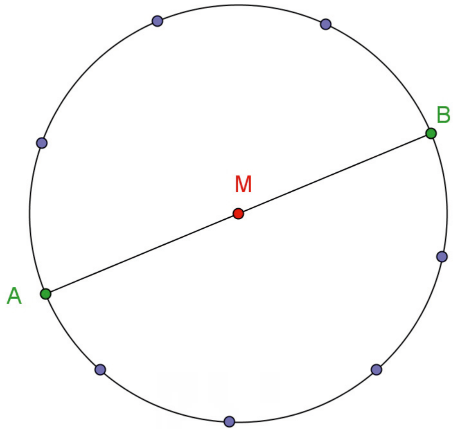


Abbildung 5.2a

Stellt euch folgendermaßen auf:

- Bildet einen Kreis.
- Ein Schüler M stellt sich in die Mitte.

Zwei Schüler A und B werden dann so ausgewählt, dass ihre Verbindung einen Durchmesser bildet, d. h. dass M der Mittelpunkt der Strecke AB ist.

Sie bekommen z. B. eine Stange zur Markierung in die Hand.

- Stellt dann eure Füße so, dass ein Fuß auf A und einer auf B zeigt.
- Welchen Winkel bilden eure Füße?

Jetzt bekommen zwei andere Schüler die Rolle von A und B.

- Stellt eure Füße wieder so, dass ein Fuß auf A und einer auf B zeigt.
- Welchen Winkel bilden eure Füße?

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:

Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt

Satz des Thales

VORLIEGENDE DATEIEN

AUFGABE 2

5-2b1_thales.ggb

www.geogebra.org/m/VcjPCqek

5-2b1_thales.tns

www.mnu.de/weko/5-2b1_thales.tns

AUFGABE 3

5-2c_thales.ggb

www.geogebra.org/m/uQKpb7Qd

5-2c_thales.tns

www.mnu.de/weko/5-2c_thales.tns

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Aufgabe 2: Ausprobieren

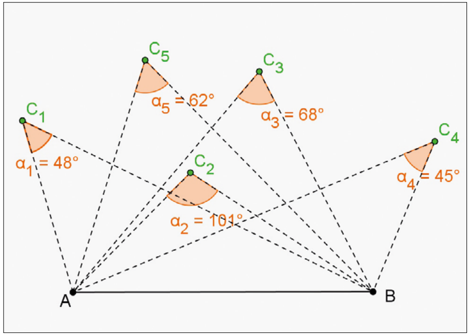


Abbildung 5.2b

Ziehe an den Punkten C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 so, dass die Winkel jeweils gleich 90° sind.

Auf welcher Linie liegen die Punkte dann vermutlich?

Aufgabe 3: Variationen an Dreiecken

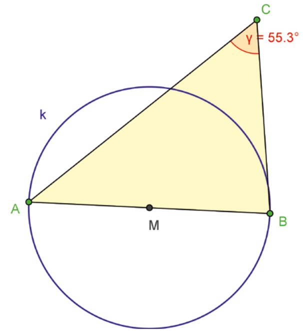


Abbildung 5.2c

Es sind ein Dreieck ABC und der Kreis mit dem Durchmesser AB gegeben. Ziehe an C.

1. Was stellst du für γ fest, wenn C innerhalb des Kreises liegt?
2. Was stellst du für γ fest, wenn C außerhalb des Kreises liegt?
3. Binde C an den Kreis. Was stellst du nun für γ fest?

Aufgabe 4: Dem Thales auf der Spur

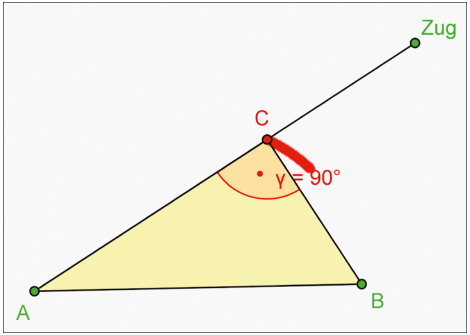


Abbildung 5.2d

Es ist ein rechtwinkliges Dreieck ($\gamma = 90°$) gegeben. Verändere die Gestalt des Dreiecks durch Ziehen am Punkt „Zug".

1. Auf welcher Linie bewegt sich dann der Punkt C?

2. Lasse C eine Spur / eine Ortslinie zeichnen.

Aufgabe 5: Thales auf den Grund gehen

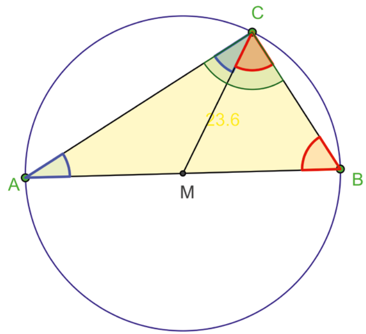


Abbildung 5.2e

Es ist ein Dreieck ABC mit dem Thaleskreis über AB gegeben. Ziehe an C und achte auf die Winkel.

1. Was fällt dir bei den gleichfarbig markierten Winkeln auf?

2. Wie groß sind alle markierten Winkel zusammen?

3. Was folgt daraus für die Größe des Winkels γ bei C?

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt
Satz des Thales

VORLIEGENDE DATEIEN

AUFGABE 4

5-2d1_thales.ggb
www.geogebra.org/m/bUxKcuxK

5-2d_thales.tns
www.mnu.de/weko/5-2d_thales.tns

AUFGABE 5

5-2e_thales.ggb
www.geogebra.org/m/mu3X6tWN

5-2e_thales.tns
www.mnu.de/weko/5-2e_thales.tns

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer

Satz des Thales

VORKENNTNISSE

Die Schülerinnen und Schüler sollten über folgende Kenntnisse verfügen:

- ***Winkelbegriff (spitze, rechte, stumpfe Winkel),***
- ***Basiswinkel in gleichschenkligen Dreiecken,***
- ***Winkelsumme im Dreieck.***

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Hinweise zur Lösung

Wesentliche Erkenntnisse bei der Lösung der Aufgabe sind:

Zu 1:
Die Schülerinnen und Schüler entdecken, dass ihre Füße einen Winkel von (ungefähr) 90° bilden.

Zu 2:
Die Schülerinnen und Schüler entdecken, dass die Punkte C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 vermutlich auf einem Kreis liegen.

Zu 3:
Die Schülerinnen und Schüler entdecken, dass

- γ spitzwinklig ist, wenn C außerhalb des Kreises liegt
- γ stumpfwinklig ist, wenn C innerhalb des Kreises liegt
- γ rechtwinklig ist, wenn C auf dem Kreises liegt.

Zu 4:
Die Schülerinnen und Schüler entdecken, dass die Spur/ Ortslinie des Punktes C mit rechtem Winkel γ eine Kreislinie (mit AB als Durchmesser) ist.

Hinweis: *Hier geht der Thaleskreis nicht heimlich in die Konstruktion mit ein! Sonst wäre es auch keine echte Erkenntnis, dass sich der Eckpunkt C auf einer Kreislinie bewegen würde, wenn er auf einer solchen konstruiert worden ist. In dieser Datei wird der rechte Winkel mit einer Senkrechten erzeugt.*

Zu 5:
Die Schülerinnen und Schüler beweisen den Satz des Thales, indem sie das Dreieck ABC in gleichschenklige Teildreiecke aufteilen und darin die Winkelsätze in Dreiecken anwenden.

Mögliche Alternative zu den Aufgabenstellungen 2 und 3:

Es wird nicht mit einem dynamischen Arbeitsblatt begonnen, sondern die Schülerinnen und Schüler konstruieren vom leeren Bildschirm aus die entsprechenden Dateien selber.

Mögliche Alternative zur Aufgabenstellung 2:

1. Ziehe an C so, dass der Winkel immer möglichst gleich 90° ist.

2. Lasse C dabei eine Spur zeichnen.

Mögliche Alternative zur Aufgabe 4:

In jedem Fall sollte der rechte Winkel durch eine Senkrechte erzeugt werden und nicht durch einen versteckten Thaleskreis. Um eine Dynamisierung zu erzielen, kann man entweder wie in 5-2d_thales einen Zugpunkt außerhalb des Dreiecks einsetzen oder einen Winkel über einen Schieberegler variieren.

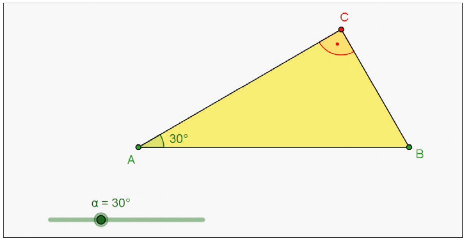


Abbildung 5.2f

VORLIEGENDE DATEIEN

5-2b2_thales.ggb
www.geogebra.org/m/eqGf29bh

5-2b2_thales.tns
www.mnu.de/weko/5-2b2_thales.tns

5-2d2_thales.ggb
www.geogebra.org/m/SFQWvYB5

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer

Satz des Thales

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Hinweise zur Lösung

MEHRWERT

Wir haben hier einen schüleraktiven präformalen Zugang zum Satz des Thales.

Dynamische Geometrie-Software verhindert die Beschränkung auf rechtwinklige Dreiecke und weitet den Blick auf spitzwinklige und stumpfwinklige Dreiecke und macht dadurch die besondere Rolle des rechten Winkels erst deutlich.

Die Problemlösekompetenz wird gefördert durch:

- systematisches Variieren (dabei Entdecken von drei typischen Fällen)
- Anwenden der Problemlösestrategie „Einzeichnen von Hilfslinien".

Die Kommunikationskompetenz wird gefördert durch:

- Beschreibung mathematischer Sachverhalte in eigenen Worten
- ggf. Formulierung des Beweises.

WERKZEUGKOMPETENZ

Bedienkompetenz:

Die Lernenden müssen den Zugmodus beherrschen und Spur/ Ortslinie anwenden.

Bei den Alternativen zu Aufgabe 2 und 3 müssen die Schülerinnen und Schüler Dreiecke, Kreis, Mittelpunkt und Winkel konstruieren können und Winkel messen.

Bei der Alternative zu Aufgabe 4 müssen die Schülerinnen und Schüler mit Schiebereglern umgehen und Winkel antragen können.

Reflexionskompetenz:

Die Lernenden nutzen das digitale Werkzeug hier auf zweierlei Arten, die sie reflektieren sollten. Einerseits ermöglicht die Nutzung des digitalen Werkzeugs die Genese von Hypothesen, inwiefern der Winkel γ mit dem Kreis durch die Punkte A und B zusammenhängt. Gleichzeitig nutzen die Schülerinnen und Schüler das Werkzeug in Aufgabe 5 als heu-

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer

Satz des Thales

ristisches Hilfsmittel zum Beweis des Satzes des Thales. Die Reflexion dieser beiden unterschiedlichen mathematischen Tätigkeiten (Hypothesen generieren und beweisen) sollte in einem werkzeugsensiblen Unterricht Gegenstand der Diskussion sein.

Dokumentationskompetenz:

Das Generieren von Hypothesen mit Hilfe des digitalen Werkzeugs verläuft im Unterricht in der Regel sehr intuitiv. Vielen Lernenden fällt es dagegen schwer, die Hypothesen in einer sprachlich angemessenen Form darzustellen. Unterstützende Satzfragmente zum Aufstellen der Hypothesen können hier helfen, wie etwa:

- Der Winkel ist ..., wenn C innerhalb des Kreises liegt.
- Wenn die Punkte C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 ..., dann

Gerade bei geometrischen Beweisen ist es für Schülerinnen und Schüler eine große Herausforderung, genau zu formulieren, was zu beweisen ist. Im Unterricht kann eine deutliche Strukturierung des Beweises daher helfen, etwa indem zunächst angegeben wird, was gezeigt werden muss. Bei den hier vorliegenden Aufgaben nutzen die Lernenden eine eher präformale Sprache.

Unterschiedliche Dokumentationen des Beweises können im Unterricht eingesammelt werden, um sie dann mit den Schülerinnen und Schülern zu vergleichen und deutlich hervorzuheben, welche Ausführungen etwa die Bedienung des Werkzeugs betreffen und welche das mathematische Argument. So kann im Unterricht thematisiert werden, dass es gerade in Entdeckungssituationen wichtig sein kann, Teilschritte des Bearbeitungsprozesses in Explorationsschritten explizit zu dokumentieren, während in Klausursituationen die mathematische Argumentation im Vordergrund stehen sollte.

LITERATUR

Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. (2011): Geometrie entdecken!, Teil 2. co.Tec Verlag

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

www.mnu.de/weko/5-3_euler.pdf

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt

Besondere Punkte im Dreieck

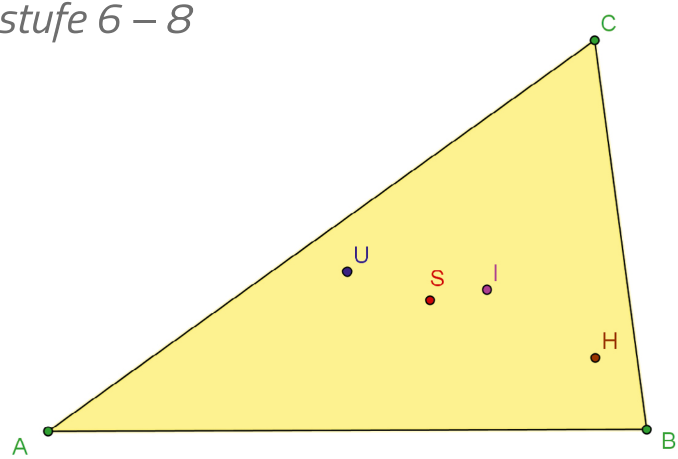
Das Thema „Besondere Punkte und Linien im Dreieck" zählt immer noch, auch und gerade beim Einsatz von DGS, zu den traditionellen Themen des Geometrie-Unterrichts.

In dieser Aufgabe werden die vier typischen Punkte gemeinsam betrachtet und deren Zusammenhänge untersucht. Dabei können im Zugmodus Erkenntnisse entdeckt werden, die im Unterricht statisch mit Papier und Stift nicht erfasst werden können.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

5.3 Besondere Punkte im Dreieck

Jahrgangsstufe 6 – 8



Diese Aufgabe eignet sich, vom leeren Bildschirm aus zu starten und die Schülerinnen und Schüler die besonderen Punkte im Dreieck selber konstruieren zu lassen. Je nach verfügbarer Zeit und Erfahrung im Umgang mit DGS kann man aber auch mit einem vorbereiteten Arbeitsblatt starten.

Die Aufgabe ist besonders geeignet, Zusammenhänge zwischen der Gestalt des Dreiecks ABC und der Lage der besonderen Punkte zu entdecken.

Aufgabe: Besondere Punkte im Dreieck konstruieren

- Zeichne ein Dreieck ABC.

- Konstruiere den Umkreismittelpunkt U und kontrolliere dein Ergebnis.
  Hinweis zur Durchführungskontrolle: Du hast kontrolliert, dass der Umkreismittelpunkt auch wirklich den Namen „U" und nicht „D" hat.

- Du hast überprüft, ob der Umkreismittelpunkt tatsächlich von allen Eckpunkten des Dreiecks den gleichen Abstand hat. Damit Eure Zeichnung nicht zu unübersichtlich wird, verbergt alle Hilfslinien. Ihr sollt nur noch Euer Dreieck und den Punkt U anzeigen lassen.

- Zeichne nun den Inkreismittelpunkt I, den Schwerpunkt S und den Höhenschnittpunkt H mit in das Dreieck ein und färbe die Punkte unterschiedlich.

- Notiere jeweils, wie die Punkte konstruiert wurden.

Speichere deine Konstruktion unter dem Namen „euler".

Aufgabe: Besondere Punkte im Dreieck untersuchen

Arbeite mit der Datei 5-3_euler.

- Verändere Dreieck ABC durch Ziehen an den Eckpunkten. Was stellst du für die Lage von I, U, H, S fest?

- Welche Sonderfälle kannst du beobachten? Notiere deine Ergebnisse. Was stellst du speziell für die Lage von S fest? Miss die Abstände zu U und zu H. In welchem Sonderfall hast du dies schon früher bewiesen?

***Hinweis:** Der Zusammenhang ist als Euler-Gerade bekannt. Benannt ist sie nach dem Mathematiker Leonhard Euler (* 15. April 1707 in Basel; † 7. September in Sankt Petersburg).*

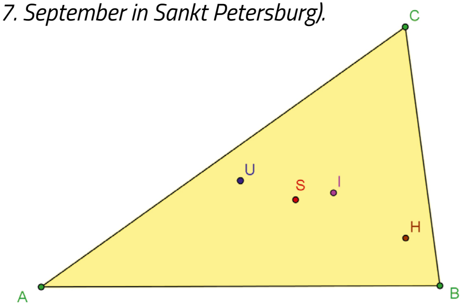


Abbildung 5.3a

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt
Besondere Punkte im Dreieck

Abbildung 5.3b: Leonhard Euler auf dem ehemaligen schweizerischen 10-Franken-Schein

VORLIEGENDE DATEIEN

5-3_euler.ggb
www.geogebra.org/m/En65Zzuh

5-3_euler.tns
www.mnu.de/weko/5-3_euler.tns

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer

Besondere Punkte im Dreieck

VORKENNTNISSE

Die Schülerinnen und Schüler sollten über folgende Kenntnisse verfügen:

- ***Sie verwenden die Begriffe Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Höhen, Seitenhalbierende, Umkreis, Inkreis, Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt.***
- ***Sie kennen besondere Dreiecke (gleichschenklig, gleichseitig, rechtwinklig) und den Satz über den Schwerpunkt.***

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Hinweise zur Lösung

Im ersten Aufgabenteil werden die besonderen Punkte konstruiert und die Korrektheit der Konstruktion im Zugmodus überprüft.

Im zweiten Aufgabenteil werden dann Zugmodus spezielle Dreiecksformen gefunden und dabei besondere Konstellationen der vier Punkte entdeckt:

- Bei gleichseitigen Dreiecken fallen alle vier Punkte zusammen.
- Bei gleichschenkligen Dreiecken liegen alle vier Punkte auf einer Geraden durch U und H.
- Bei rechtwinkligen Dreiecken liegt U auf der Hypotenuse und H im Eckpunkt des rechten Winkels und S teilt UH im Verhältnis 2:1
- Dieses Teilverhältnis 2:1 bleibt auch bei beliebigen Dreiecken erhalten.

Mögliche Alternativen zur Aufgabenstellung:

Je nach Zeit und Erfahrung kann mit der Konstruktion vom leeren Bildschirm aus begonnen werden oder gleich mit dem zweiten Teil und einer vorbereiteten Konstruktion.

MEHRWERT

Das digitale Werkzeug erweitert die Problemlösekompetenz durch

- systematisches Variieren,
- Anwenden der Problemlösestrategie „Spezialfälle finden".

Das digitale Werkzeug erweitert die Argumentationskompetenz durch

- Erläuterung mathematischer Sachverhalte in eigenen Worten.

WERKZEUGKOMPETENZEN

Bedienkompetenz:

- Konstruieren mit den Konstruktionswerkzeugen für Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Senkrechte, Mittelpunkte, Schnittpunkte
- Punkt ziehen im Zugmodus
- Abstände messen
- präzises Ausrichten von Punkten.

Dokumentationskompetenz:

Die Schülerinnen und Schüler notieren auf der inhaltlichen Ebene:

- Der Umkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.
  Der Inkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.
  Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.
  Der Höhenschnittpunkt ist der Schnittpunkt der Höhen.
- Bei speziellen Dreiecken liegen die Punkte in besonderen Konstellationen:

  a) Bei gleichseitigen Dreiecken fallen alle vier Punkte zusammen.

  b) Bei gleichschenkligen Dreiecken liegen alle vier Punkte auf einer Geraden durch U und H.

  c) Bei rechtwinkligen Dreiecken liegt U auf der Hypotenuse und H im Eckpunkt des rechten Winkels und S teilt UH im Verhältnis 2:1
- Das Teilverhältnis HS:SU = 2:1 bleibt auch bei beliebigen Dreiecken erhalten.

LITERATUR

Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. (2011): Geometrie entdecken!, Teil 2. co.Tec Verlag

Heintz, G. & Elschenbroich, H.-J. (2014): Geometrie kompakt, Modul B. Fortbildungsreihe DZLM & Medienberatung NRW.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

www.mnu.de/weko/5-4_mittenviereck.pdf

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt

Mittenviereck

Der Satz von Varignon über die Mittenvierecke eignet sich besonders für Aspekte des Problemlösens und heuristischen Arbeitens im Sinne der dritten Winter'schen Grunderfahrung.

Der Einsatz von DGS beim Problemlösen, bei explorativem und entdeckendem Lernen und visuellem Beweisen erweitert den Werkzeugcharakter von DGS und betont den Aspekt des heuristischen Denkwerkzeugs. Das Beispiel zeigt, wie die Schülerinnen und Schüler selbstständig Gesetzmäßigkeiten entdecken können. Dabei können sie durch dynamische Geometrie-Software unterstützt eigene Beweisideen erarbeiten und erste (präformale) Beweise führen.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

5.4 Mittenviereck

Jahrgangsstufe 7 – 9

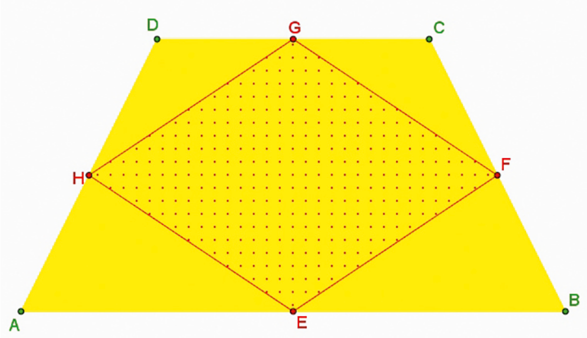


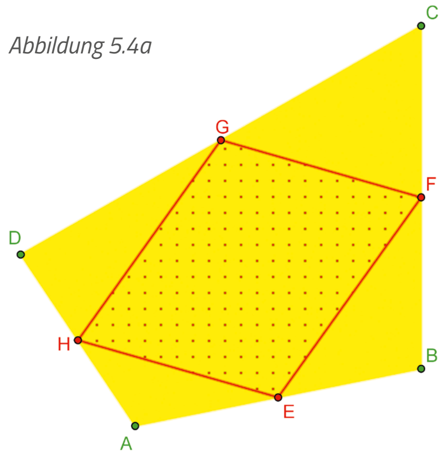
Abbildung 5.4

Das dynamische Arbeitsblatt beginnt mit einem experimentellen, explorierenden Zugang in Teil a).

Die Überlegungen in Teil b) und c) sind im Finden der geeigneten Hilfslinien durchaus anspruchsvoll. Deswegen werden gestuft Hilfen angeboten.

Aufgabe: Mittendrin

Abbildung 5.4a



Es ist ein Viereck ABCD gegeben, das du durch Ziehen an den Eckpunkten verändern kannst.

E, F, G und H sind die Mittelpunkte der Seiten.

a) Beobachte das innere Viereck EFGH, wenn das Viereck ABCD

- ein Rechteck ist
- ein Quadrat ist
- eine Raute ist
- ein Parallelogramm ist
- ein Trapez ist
- ein beliebiges Viereck ist.

Was stellst du fest?

b) Kannst du begründen, warum deine Beobachtung richtig sein muss?
Tipp: Unterteile das Viereck ABCD durch eine geeignete Hilfslinie.

c) Wie groß ist das innere Viereck EFGH im Vergleich zum äußeren Viereck ABCD?
Tipp: Verbinde den Mittelpunkt M der Diagonalen AC mit den Eckpunkten E, F, G, H.

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt
Mittenviereck

VORLIEGENDE DATEIEN

5-4_mittenviereck.ggb
www.geogebra.org/m/S3WgTwa3

5-4_mittenviereck.tns
www.mnu.de/weko/5-4_mittenviereck.tns

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer
Mittenviereck

VORKENNTNISSE

Die Schülerinnen und Schüler sollten über folgende Kenntnisse verfügen:

- ***Vierecke***
- ***Achsensymmetrie***
- ***Kongruenz von Dreiecken***
- ***Mittellinie in Dreiecken oder zentrische Streckung / Strahlensatz.***

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Hinweise zur Lösung

Wesentliche Erkenntnisse bei der Lösung der Aufgabe sind:

Die Schülerinnen und Schüler entdecken, dass das Mittenviereck immer ein Parallelogramm ist. Dabei lernen sie, systematisch Spezialfälle zu explorieren und zu verallgemeinern.

Bei den Aufgabenteilen b) und c) ist die heuristische Strategie zielführend, Hilfslinien einzuzeichnen. In den dynamischen Arbeitsblättern können die Schülerinnen und Schüler sich dazu gestuft Tipps anzeigen lassen, da das völlig selbstständige Finden der Hilfslinien sehr anspruchsvoll ist.

Zu a)

- Beim Rechteck ist das Mittenviereck eine Raute,
- beim Quadrat ein Quadrat,
- bei der Raute ein Rechteck,
- beim Parallelogramm ein Parallelogramm,
- beim Trapez eine Raute,
- beim beliebigen Viereck ein Parallelogramm.

Zu b)
Die Diagonale AC zerteilt das Viereck ABCD in zwei Dreiecke ABC und ACD.

Argumentation 1: Die Strecken EF und GH des Mittendreiecks sind Mittelparallelen in diesen Dreiecken. Das folgt die Parallelität von EF und GH.

Argumentation 2: Das Dreieck ABC entsteht aus dem Dreieck EBF durch eine zentrische Streckung von B aus mit dem Faktor 2. Und entsprechend das Dreieck ACD aus dem Dreieck HGD.

Dann erfolgt die entsprechende Argumentation zu der Diagonalen BD.

Damit ist gezeigt, dass die gegenüberliegenden Seiten des Mittenviereckes jeweils parallel sind.

Zu c)
Verbindet man den Mittelpunkt M der Diagonalen AC mit den Eckpunkten E, F, G, H des Mittenvierecks, so wird offensichtlich, dass das Viereck ABCD so in Teildreiecke zerlegt wird, dass jeweils ein „gelbes" und ein „rot gepunktetes" Dreieck kongruent sind. Daher ist der innere rot gepunktete Teil des Vierecks ABCD genau so groß wie die gelbe Restfläche. Oder anders gesagt: Das Viereck ABCD ist doppelt so groß wie sein Mittenviereck.

MEHRWERT

Bei der Suche nach Erkenntnissen und Begründungen hilft die dynamische Geometrie-Software. Sie wird somit zum Erkenntniswerkzeug. Dies trifft insbesondere hier auf einer präformalen, explorierenden Ebene zu, wenn die Schülerinnen und Schüler experimentell Parallelitäten überprüfen, Winkel und Längen messen und Flächeninhalte messen und vergleichen. Entdecken und Begründen und sind nicht aufs Gymnasium beschränkt, sondern können auch auf einem weniger formalen und mehr explorierenden Level stattfinden.

Die Problemlösekompetenz wird gefördert durch:

- systematisches Variieren (dabei Entdecken von typischen Fällen)
- Anwenden der Problemlösestrategie „Einzeichnen von Hilfslinien".

Die Kommunikationskompetenz wird gefördert durch:

- Beschreibung mathematischer Sachverhalte in eigenen Worten
- ggf. Formulierung des Beweises.

WERKZEUGKOMPETENZEN

Die Schülerinnen und Schüler müssen den Zugmodus beherrschen, Winkel und Längen messen, Flächeninhalte messen, Parallelität überprüfen. Außerdem müssen sie Hilfetexte über Kontrollkästchen abrufen können.

LITERATUR

Biehler, R., Dutkowski, W., Elschenbroich, H.-J.; Heintz, G.; Hollendung, K. & Kuzle, A. (2014): Geometrie lehren und lernen – kompetenzorientiert und dynamisch. In: Medienbrief 2/2014. LVR Zentrum für Medien und Bildung. Düsseldorf. S. 29 – 30 *www.medien-und-bildung.lvr.de/media/lehr__und_paedagogische_fachkraefte/medienbrief/medienbrief_2014_2_mathematik/Medienbrief_2014-2_FINAL_Web.pdf*

Elschenbroich, H.-J.; Seebach, G. (2011): Geometrie entdecken!, Teil 2. co.Tec Verlag

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

www.mnu.de/weko/5-5_radius.pdf

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt

Radius gesucht

Üben wird häufig nur negativ als Drill bewertet. Dabei ist Üben für das Können unverzichtbar, Üben ist Teil des Lernens und bewahrt vor dem Vergessen.

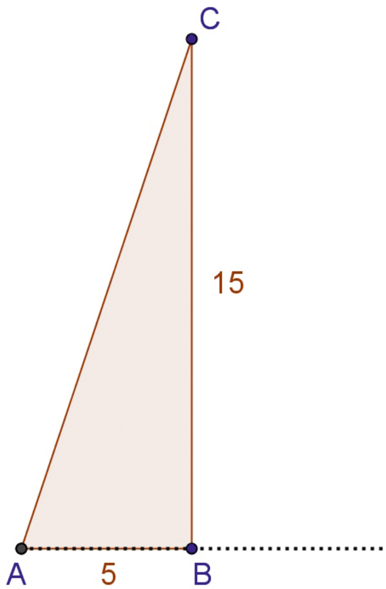
„Üben ist damit im Wesentlichen das Wiederaufnehmen eines (entdeckenden) Lernprozesses, das Nocheinmalnachbilden, Nocheinmalnachbauen von Lernsituationen."
(H. Winter)

Das Beispiel einer Aufgabe aus Spiegel online zeigt auf, wie man diese Aufgabe sowohl zum Problemlösen wie zum vertiefenden Üben nutzen kann.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

5.5 Radius gesucht
Üben und Problemlösen

Jahrgangsstufe 7 – 9



Die Aufgabe greift eine viel diskutierte Aufgabe aus Spiegel ONLINE auf und stellt den Zusammenhang zu grundlegenden Sätzen am Dreieck her.

Hier kann man – unterstützt durch (digitale) Tippkarten – vom leeren Bildschirm aus konstruieren. Für eine zielführende Konstruktion ist es hilfreich, typische Problemlösestrategien zu verfolgen. Insbesondere ist dies dadurch zu erreichen, dass eine der Bedingungen (zunächst) weg gelassen wird. Dabei wird durch geeignetes Ziehen an Punkten Entdeckungen ermöglicht, die zu einer Lösungsidee führen kann.

Die Aufgabe besitzt vielfältige Lösungsmöglichkeiten. Die Vielfalt der Zugänge ermöglicht eine Vernetzung vorhandener Inhalte und dadurch ein vertieftes Üben sowie ein arbeitsteiliges und kooperatives Arbeiten.

Aufgabe 1:
„Das Kreuz mit dem Kreis“ Alternative A

Gegeben sind zwei Strecken AB und BC mit den Längen 5 cm und 15 cm, die einen rechten Winkel bei B bilden. Die kürzere Strecke AB wird zu einem Strahl verlängert. Auf diesem Strahl soll der Punkt M liegen, der Mittelpunkt eines Kreises durch A und C sein soll.

Bestimme diesen Mittelpunkt und den Radius des Kreises.

Tipps:

1. Konstruiere auf dem Strahl AB einen beweglichen Punkt M_1 und einen Kreis k um M_1 durch A.
2. Erzeuge den Schnittpunkt D dieses Kreises mit dem Strahl AB und variiere den Punkt M_1.
3. Verbinde C und D durch eine Strecke und miss den Winkel ACD.

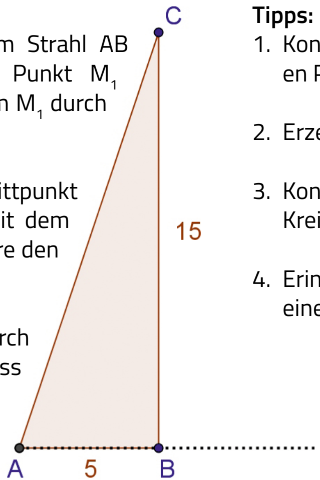


Abbildung 5.5a

Aufgabe 2:
„Das Kreuz mit dem Kreis“ Alternative B

Gegeben sind zwei Strecken AB und BC mit den Längen 5 cm und 15 cm, die einen rechten Winkel bei B bilden. Die kürzere Strecke AB wird zu einem Strahl verlängert. Auf diesem Strahl soll der Punkt M liegen, der Mittelpunkt eines Kreises durch A und C sein soll.

Bestimme diesen Mittelpunkt und den Radius des Kreises.

Tipps:

1. Konstruiere einen Strahl AB und einen freien Punkt D, der nicht auf dem Strahl liegt.
2. Erzeuge einen Kreis k durch A, C und D.
3. Konstruiere den Mittelpunkt M_1 dieses Kreises.
4. Erinnere dich an den Umkreismittelpunkt eines Dreiecks.

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt
Radius gesucht

VORLIEGENDE DATEIEN

AUFGABE 1

5-5a_radius.ggb
www.geogebra.org/m/kvWXcJS4

5-5a_radius.tns
www.mnu.de/weko/5-5a_radius.tns

AUFGABE 2

5-5b_radius.ggb
www.geogebra.org/m/jvZXwUQ3

5-5b_radius.tns
www.mnu.de/weko/5-5b_radius.tns

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer

Radius gesucht

VORKENNTNISSE

Die Schülerinnen und Schüler sollten über folgende Kenntnisse verfügen:

- ***Satz des Thales***
- ***Satz des Pythagoras***
- ***Umkreis / Kreis durch drei Punkte***
- ***Senkrechte***
- ***Winkel messen***
- ***Längen messen.***

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Hinweise zur Lösung

Wesentliche Erkenntnisse bei der Lösung der Aufgabe sind:

Zu Alternative A:
Die Schülerinnen und Schüler entdecken im Zugmodus, dass der Winkel bei C 90° sein muss. Dann liegt C auf dem Thaleskreis um M durch A und C.

Ein typischer Fehler besteht darin, im Zuge der Konstruktion den Punkt C an einem Thaleskreis binden zu wollen. Dadurch wird jedoch die Konstruktion des Dreiecks mit den festen Größen 5 cm und 15 cm aufgelöst und zu einem dynamischen Dreieck verformt.

Zu Alternative B:
Die Schülerinnen und Schüler entdecken, dass der Mittelpunkt der Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten sein muss.

Mögliche Alternative:
Hier wurden dynamische geometrische Konstruktionen thematisiert.
Alternativ kann man auch mit einer (starren) Planfigur und Variablen ansetzen.

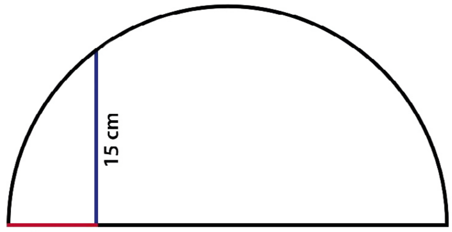


Abbildung 5.5b

Dann kann man mit dem Satz des Pythagoras eine Gleichung ansetzen und diese lösen, z. B.

$$
\begin{aligned}
r^2 &= 15^2 + a^2 \\
r^2 &= 15^2 + (r-5)^2 \\
r^2 &= 225 + r^2 - 10r + 25 \\
0 &= 250 - 10r \\
10r &= 250 \\
r &= 25
\end{aligned}
$$

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer
Radius gesucht

MEHRWERT

Hier wird eine geometrische Konstruktion ermöglicht anstelle einer algebraischen Lösung.

Die Problemlösekompetenz wird gefördert durch das Anwenden der Problemlösestrategie „Weglassen einer Bedingung".

Dabei werden klassische geometrische Sätze (Thales, Umkreis & Mittelsenkrechte, beim algebraischen Zugang auch Satz des Pythagoras) benötigt und durch ihren Einsatz gefestigt. So werden diese Sätze implizit geübt.

Die Kommunikationskompetenz wird gefördert durch Arbeiten in Gruppen und anschließende gegenseitige Präsentieren der erarbeiteten Lösungen.

WERKZEUGKOMPETENZEN

Die Schülerinnen und Schüler müssen den Zugmodus beherrschen, verschiedene Arten von Punkten (freier Punkt, Punkt auf einer Linie, Schnittpunkt) nutzen, mit Kreisen, Senkrechten und Schnittpunkten konstruieren, Winkel und Längen messen.

LITERATUR

Elschenbroich, H.-J. (2016): Problemlösen durch Dynamisieren. In: Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 68/2016. Freising, Aulis Verlag. S. 34 – 38

Heintz, G. & Elschenbroich, H.-J (2014): Geometrie kompakt, Modul B. Fortbildungsreihe DZLM & Medienberatung NRW.

Spiegel online: Rätsel der Woche. Das Kreuz mit dem Kreis. *www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/raetsel-der-woche-kreis-unbekannter-groesse-a-1005539.html.* [Letzter Zugriff am 10.10.2016]

Winter, H. (1984): Üben. In: mathematik lehren, Heft 2

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

www.mnu.de/weko/5-6_groessenverteilung.pdf

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt
Verteilung der Körpergröße

5.6 Verteilung der Körpergröße

Jahrgangsstufe 8 – 9

Diagramme von Verteilungen begegnen den Schülerinnen und Schülern am Ende der Sekundarstufe I sehr häufig. Sei es die Auswertung der letzten Runde eines Online-Rollenspiels zu Hause oder ein Diagramm im Erdkundeunterricht in der Schule.

Trotz der Häufigkeit von Histogrammen ist es für Schülerinnen und Schüler gar nicht so einfach zu durchschauen, wie sich diese aufbauen. Dasselbe gilt auch für andere Darstellungsformen wie den Boxplot.

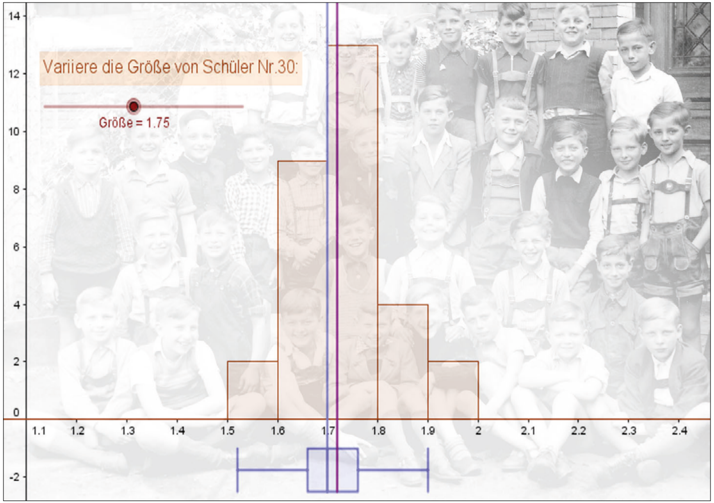


Abbildung 5.6

Das dynamische Arbeitsblatt enthält einen Datensatz der Körpergröße einer Schulklasse. Rohdaten, Histogramm und Boxplot werden direkt angezeigt.

Eine Änderung der Rohdaten wird sofort in den Diagrammen angezeigt, sodass die Schülerinnen und Schüler selbst erkunden können, wie sich die Veränderung eines oder mehrerer Werte auf die Diagramme auswirkt.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Aufgabe: Körpergröße von Jugendlichen

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt
Verteilung der Körpergröße

Das digitale Arbeitsblatt zeigt die Verteilung der Körpergrößen einer Schulklasse sowohl als Histogramm als auch als Boxplot. Die Urliste zu den einzelnen Körpergrößen der Schülerinnen und Schüler befindet sich in Spalte A der Tabelle in der rechten Hälfte des Arbeitsblattes. Zusätzlich sind in dem Diagramm der Median und der Mittelwert als senkrechte Linien dargestellt.

Beantworte folgende Fragen schriftlich:

1. Welche Bedeutung hat der erste Balken im Histogramm?
2. Die Whisker geben im Boxplot den Minimalwert und den Maximalwert an. Warum ist das Histogramm breiter als der Boxplot?

Der Klassenclown hat einen beliebigen Wert für seine Größe angegeben. Variiere mit dem Schieberegler die Größe eines einzelnen Schülers.

3. Welche Kenngrößen kannst du so verändern?
4. Begründe, welches Maß robuster gegen Ausreißer ist, der Mittelwert oder der Median?
5. Versuche durch das Ändern der Größe von Schülern in Spalte B (rechts) den Median zu ändern. Versuche so wenige Werte wie möglich zu ändern.

VORLIEGENDE DATEIEN

GeoGebra

5-6_groessenverteilung.ggb
www.geogebra.org/m/Ykrpzr9m

TI-nspire

5-6_groessenverteilung.tns
www.mnu.de/weko/5-6_groessenverteilung.tns

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer

Verteilung der Körpergröße

VORKENNTNISSE

Die Schülerinnen und Schüler sollten über folgende Kenntnisse verfügen:

- ***Den Schülerinnen und Schüler sind Mittelwert, Median und Streuungsmaße bekannt.***
- ***Die Schülerinnen und Schüler sollten Histogramm und Boxplot als Darstellungsmöglichkeiten für Daten kennen und diese schon eigenständig ohne Hilfsmittel erstellt haben.***

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:

Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Hinweise zur Lösung

Wesentliche Erkenntnisse bei der Lösung der Aufgabe:

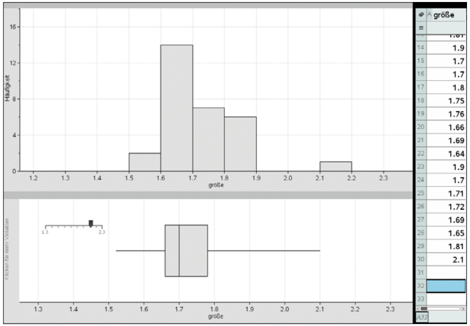


Abbildung 5.6a

zu 1) und 2):

Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass es insbesondere zwei Jugendliche gibt, die zwischen 1,50 m und 1,60 m groß sind, und im Allgemeinen, dass eine Säule des Histogramms die absolute Anzahl der Jugendlichen in der vorgegebenen Klasse des Histogramms angibt.

Die Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, dass die Werte im Histogramm zu Klassen zusammengefasst werden, aber nicht alle Werte innerhalb der Klasse angenommen werden. Insbesondere kann der linke Wert der kleinsten Klasse kleiner sein, als der Minimalwert der Urliste bzw. der rechte Wert der größten Klasse größer als das Maximum der Urliste.

zu 3), 4) und 5):

Ein Wert beeinflusst im Histogramm genau einen Balken, im Boxplot entweder das Minimum oder das Maximum oder gar nichts. Median und Quartile (Lage und Größe der Box) werden nur geringfügig (oder gar nicht) verändert. Der Median ist robuster gegenüber der Veränderung eines Wertes und ändert sich i.d.R. nicht. Der Mittelwert hingegen ist anfällig für große Ausreißer.

Um den Median zu ändern müssen solange Werte geändert werden, bis die Hälfte der Werte kleiner oder größer als der aktuelle Median von 1,70 m ist. Damit ist hier nur ein Wert zu ändern, nämlich ein 1,70-Wert zu vergrößern, z. B. auf 1,80. (Gilt bei Grundeinstellung des Schiebereglers. Ansonsten muss man gegebenenfalls 2 Werte ändern.)

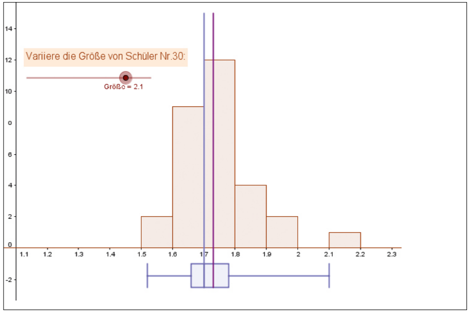


Abbildung 5.6b

MEHRWERT

- Jegliche Änderung von Daten ist sofort in Boxplot und Histogramm sichtbar.
- Systematisches Variieren eines Wertes der Urliste wird dynamisch veranschaulicht.

WERKZEUGKOMPETENZEN

Bedienkompetenz:

- Systematische Variation von Werten in der Tabelle.
- Systematische Variation des Schiebereglers.

Dokumentationskompetenz:

Die Schülerinnen und Schüler notieren auf der inhaltlichen Ebene,

- dass in der ersten Säule des Histogramms zwei Werte liegen,
- dass in der Regel kein Wert in der Klasse genau auf den Randwerten der Klasse liegt,
- dass der Median stabiler ist als der Mittelwert, d. h. dass ein Ausreißer den Median gar nicht oder kaum verändert, während ein Ausreißer den Mittelwert stark verändern kann,
- dass, um den Median zu ändern, solange Werte geändert werden müssen, bis die Hälfte der Werte kleiner oder größer als der aktuelle Median ist.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

www.mnu.de/weko/5-7_fernsehverhalten.pdf

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt
Fernsehverhalten von Jugendlichen

5.7 Fernsehverhalten von Jugendlichen (Boxplot)

Jahrgangsstufe 8 – 9

Der Boxplot ist eine Darstellungsmethode, die sich insbesondere eignet, um große Datenmengen übersichtlich darzustellen.

Den meisten Schülerinnen und Schülern begegnen Boxplots in der Schule zum ersten Mal. Deshalb ist es wichtig, dass sie die Möglichkeit erfahren, wie solche Plots mit den Rohdaten zusammenhängen und wie sich die Größe des Datensatzes auf das Diagramm auswirkt.

Abbildung 5.7

Das dynamische Arbeitsblatt enthält einen Datensatz über das Fernsehverhalten von Jugendlichen. Zum Vergleich werden die Daten einer Klasse mit dem Gesamtdatensatz von 25 Klassen verglichen. Die Schülerinnen und Schüler sollen die Rohdaten so manipulieren, dass Median und Mittelwert bestimmte Werte annehmen.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Aufgabe: Fernsehverhalten von Jugendlichen

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt

In einer groß angelegten Umfrage wurden 734 Schülerinnen und Schüler über ihr Fernsehverhalten befragt. Unter anderem wurde der wöchentliche Fernsehkonsum in Stunden abgefragt. Auf dem digitalen Arbeitsblatt sind die Ergebnisse aus einer Klasse mit 30 Schülern (oben) und aller Schülerinnen und Schüler (unten) als Boxplots dargestellt.

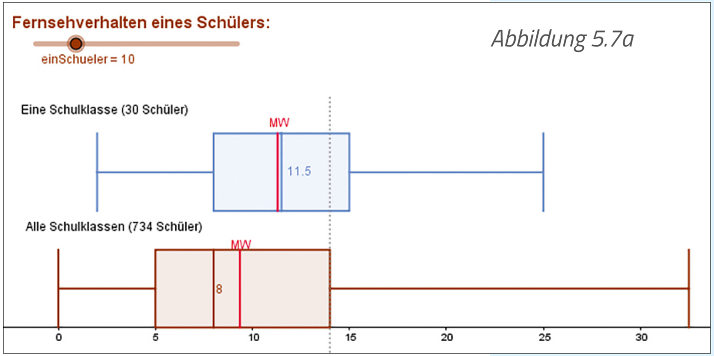


Abbildung 5.7a

Es soll untersucht werden, wie robust die Daten sind. Dazu soll die Veränderung der Boxplots bei Änderung der Fernsehzeit eines Schülers untersucht werden.

1. Variiere zuerst die wöchentliche Fernsehzeit eines Schülers der Klasse mit Hilfe des Schiebereglers. Welche Kenngrößen verändern sich, welche bleiben bestehen? Was fällt dir auf, wenn du die Änderung in den Boxplots vergleichst?

Manipuliere nun die Daten von mehreren Schülern der Klasse, indem du die Werte in Tabelle A überschreibst. (Hinweis! Es dürfen nur die Werte in den ersten 30 Zeilen überschrieben werden.)

2. Ändere die Daten so, dass der Median kleiner als 8 wird. Versuche möglichst wenige Datensätze zu ändern. Wie ändert sich der Boxplot aller Schülerinnen und Schüler durch die Manipulation?

3. Versuche mit möglichst wenigen Änderungen der Daten einen Mittelwert kleiner 8 sowie größer 15 zu erzielen. (Hinweis: Bei Nutzung von Geogebra musst du vorher die Daten wiederherstellen. In der TI-Nspire-Datei kann dies erfolgen, indem die Datei ohne Speichern geschlossen und danach wieder geöffnet wird.)

VORLIEGENDE DATEIEN

5-7_fernsehverhalten.ggb
www.geogebra.org/m/PZVAZDzY

5-7_fernsehverhalten.tns
www.mnu.de/weko/5-7_fernsehverhalten.tns

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

VORKENNTNISSE

Die Schülerinnen und Schüler sollten über folgende Kenntnisse verfügen:

- ***Den Schülerinnen und Schülern sind Mittelwert, Median und Streuungsmaße bekannt.***
- ***Die Schülerinnen und Schüler sollten den Boxplot als Darstellungsmöglichkeit für Daten kennen und schon eigenständig ohne Hilfsmittel erstellt haben.***

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Hinweise zur Lösung

Wesentliche Erkenntnisse bei der Lösung der Aufgabe:

Bei der Variation nur eines Wertes machen sich die Änderungen in den Kenngrößen des Boxplots bei großen Datenmengen (734) fast nur im rechten Whisker bemerkbar, während sich die Kenngrößen des Boxplots der kleinen Datenmenge (30) deutlicher verändern, wobei auch hier keine großen Änderungen auftreten.

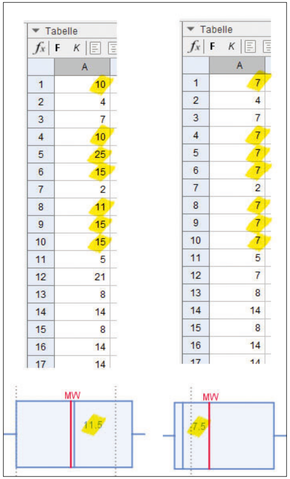


Abbildung 5.7b

Der Mittelwert ändert sich in der großen Stichprobe minimal, in der kleinen Stichprobe deutlich. Selbst der recht kleine Stichprobenumfang von 30 ist also schon verhältnismäßig robust gegen eine einzige Falscheingabe.

Um den Median bei der kleinen Stichprobe auf einen Wert kleiner 8 zu schieben, müssen die Hälfte der Werte der Urliste kleiner 8 werden. Dazu müssen 7 Werte der Tabelle, die größer sind als 8, auf Werte kleiner als 8 geändert werden (siehe Abbildung 5.7b). Man erkennt, dass dadurch der Boxplot der großen Stichprobe nicht beeinflusst wird. (Um geeignete Werte zu finden, kann die Urliste auch der Größe nach sortiert werden. Dies erfordert aber eine erhöhte Bedienkompetenz der Schülerinnen und Schüler.)

Um den Mittelwert möglichst stark zu vergrößern, muss lediglich ein Wert genügend groß gesetzt werden, beispielsweise der erste Wert auf 100. Soll der Mittelwert hingegen verringert werden, müssen möglichst große Werte auf 0 geändert werden, hier die 5 größten Werte.

MEHRWERT

- Jegliche Änderung von Daten ist sofort im Boxplot bzw. im Histogramm sichtbar.
- Systematisches Variieren eines Wertes der Urliste wird dynamisch veranschaulicht.
- Es wird mit realistischen, relativ großen Datenmengen gearbeitet, die von den Schülerinnen und Schülern ohne digitale Werkzeuge gar nicht in realistischen Zeiten zu bearbeiten wären.

WERKZEUGKOMPETENZEN

Bedienkompetenz:

- Systematische Variation von Werten in der Tabelle.
- Systematische Variation des Schiebereglers.

Dokumentationskompetenz:

- Die Schülerinnen und Schüler notieren auf der inhaltlichen Ebene,
- dass sich bei Änderung eines Wertes der Urliste in beiden Stichproben (30 und 734) die Whisker ändern,
- dass alle anderen Kenngrößen in der kleinen Stichprobe deutlich variieren, während sie in der großen Stichprobe kaum variieren,
- dass möglichst große Werte gewählt und auf 0 geändert werden müssen, um den Mittelwert zu verringern,
- dass solange Werte geändert werden müssen, bis die Hälfte der Werte kleiner 6 ist, um den Median zu ändern.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

www.mnu.de/weko/5-8_minutenschaetzen.pdf

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt

Mit Simulationen zum Hypothesentest

5.8 Mit Simulationen zum Hypothesentest

Jahrgangsstufe 7–13

Abbildung 5.8

Daten sachgerecht sammeln, darstellen und auswerten, dies sind wichtige Kompetenzen, die im Stochastikunterricht gelernt werden sollen. Mit angemessenen Darstellungen können schon viele Fragen beantwortet werden, jedoch nicht die Frage, ob Daten nicht auch zufällig entstanden sein könnten. Dies ist das Gebiet der beurteilenden Stochastik.

Das Testen von Hypothesen stellt allerdings nicht nur aus Sicht der Lernenden oft eines der großen Probleme im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II dar.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Sicher kann man durch Erfahrung lernen, aber wie schnell geht das? Hier soll von den Schülerinnen und Schülern geschätzt werden, wie lange eine Minute dauert. Werden sie sich beim zweiten Versuch verbessern? Und wie stellt man klar, dass sie sich verbessert haben?

Beantworten kann man die Fragen durch einen Vergleich mit der theoretischen Verteilung und den bekannten Algorithmen.

Algorithmen stehen aber am Ende eines Erkenntnisprozesses nicht am Anfang. Zu Beginn sind stochastische Denkweisen gefragt. Wann können Daten als „zufällig" und wann als „nicht zufällig" bezeichnet werden?

Simulationen helfen hier weiter. Sie legen die Grundsteine für die theoretische Verteilung. Mit ihnen kann Verständnis erzeugt werden, ob ein Datensatz als zufällig eingestuft werden kann oder nicht. Stochastische Denkweisen werden so vor der Einführung der Binomialverteilung angeregt und führen zu einem vertieften Verständnis für Verfahrensweisen in der beurteilenden Statistik.

Motivierend wirkt die Bearbeitung eines Datensatzes, der im Klassenzimmer gewonnen wurde.

Aufgabe: Minutenschätzen

Aufgabe 1: Minutenschätzen I

In diesem Experiment schätzt ihr in der Klasse eine Minute mit Hilfe einer Uhr mit Sekundenzeiger zweimal hintereinander ab. Die Ergebnisse werden dann in einer Tabellenkalkulation festgehalten. Bearbeitet danach die folgenden beiden Aufgaben:

1. Kannst du belegen, dass sich die Lerngruppe verbessert hat?

2. Kannst du aus diesen Daten schlussfolgern, dass die Lerngruppe aus der ersten Erfahrung gelernt hat, oder könnte das Ergebnis auch rein zufällig entstanden sein?

Aufgabe 2: Minutenschätzen II

In einer Klasse wurden die Lernenden aufgefordert, mit geschlossenen Augen eine Zeitspanne von 60 Sekunden abzuschätzen. Danach öffneten sie die Augen und notierten, wie viele Sekunden tatsächlich auf einer mitlaufenden Uhr vergangen sind. Dieser Versuch wurde zwei Mal durchgeführt. In der beiliegenden Datei findest du die Ergebnisse der beiden Versuche in den Spalten vers1 und vers2 bei TI-Nspire bzw. Spalten A und B bei GeoGebra.

Im Rahmen der Aufgabe soll den Fragen nachgegangen werden, inwiefern man belegen kann, dass sich die Lerngruppe verbessert hat und inwiefern man aus den Daten schlussfolgern kann, ob die Lerngruppe aus den Erfahrungen des ersten Versuchs gelernt hat.

a) Formuliere zunächst Aussagen über den Datensatz mit Hilfe der folgenden Begriffe: Mittelwert, Median, Boxplot, Streuung, Standardabweichung, Varianz, Anzahl der Verbesserungen.

b) Stelle die Daten mit Hilfe eines Boxplots dar.

c) Führe nun mit Hilfe deines digitalen Werkzeugs mehrere Simulationen der Versuchsreihe durch (vergleichbar mit einem 25-fachen Münzwurf). Wie häufig wird ein Ergebnis wie im realen Versuch (>19 von 25) realisiert?

d) Kann man mit Hilfe der Simulation oben belegen, dass diese Verbesserung nicht zufällig entstanden ist, sondern auf Erfahrungen beruht?

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt

Mit Simulationen zum Hypothesentest

VORLIEGENDE DATEIEN

5-8_minutenschaetzen-I.ggb
www.geogebra.org/m/Ey6qbJbG

5-8_minutenschaetzen-II.ggb
www.geogebra.org/m/YjpWEWAg

5-8_minutenschaetzen.tns
www.mnu.de/weko/5-8_minutenschaetzen.tns

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer

Mit Simulationen zum Hypothesentest

VORKENNTNISSE

Die Schülerinnen und Schüler sollten über folgende Kenntnisse verfügen:

- ***Daten in Diagramme umwandeln (z. B. Histogramme, Boxplots)***
- ***Kennzahlen berechnen (z. B. Median, Mittelwert)***
- ***Simulationen des Lernzuwachses durchführen können (Zufallszahlen 0 und 1 erzeugen und aufsummieren können).***
- ***Wissen, dass die Ergebnisse vieler Simulationen des Lernzuwachses als Entscheidungsgrundlage für die Einschätzung der Zufälligkeit des Datensatzes genommen werden können.***

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Hinweise zur Lösung

Die Aufgaben Minutenschätzen I und Minutenschätzen II haben den gleichen Lerngegenstand zum Thema, differenzieren als Alternativen aber hinsichtlich der Vorkenntnisse mit dem Werkzeug.

Wesentliche Erkenntnisse bei der Lösung der Aufgabe sind:

- Aus den Diagrammen und Kennzahlen können qualitative Aussagen über den Lernzuwachs der gesamten Gruppe herausgearbeitet werden. (Mittelwert, Median, Boxplot, Streuung, Anzahl der Verbesserungen, ...)
- In der Analyse der Boxplots können aus Veränderungen der Lage der Box, der Veränderung der Mediane und der arithmetischen Mittelwerte Aussagen über die Verbesserung der gesamten Gruppe getroffen werden.
- Die Anzahl der Lernenden, die im zweiten Versuch ein besseres Ergebnis erzielt hat, kann mit einer Simulation verglichen werden, um erste Hinweise über quantitative Aussagen zu erhalten.
- Durch Vergleich mit vielen Simulationen zufälliger Verbesserungen wird deutlich, dass sich nur selten in diesen Simulationen eine größere Anzahl von Verbesserungen (hier in der Aufgabenstellung >19 von 25) im Vergleich zum Test ergibt.
- Führt man die Simulationen häufig durch, kann mittels der relativen Häufigkeit angegeben werden, wie selten das Versuchsergebnis in einer Simulation auftritt.

Hinweise zur Durchführung des Experiments Minutenschätzen I

Die Lernenden werden aufgefordert, mit geschlossenen Augen eine Zeitspanne von 60 Sekunden abzuschätzen. Danach öffnen sie die Augen und notieren, wie viele Sekunden tatsächlich auf einer mitlaufenden Stoppuhr vergangen sind.

Die Ergebnisse werden in einer Spalte (vers1) niedergeschrieben. Danach wird der Versuch wiederholt und die Ergebnisse in die nächste Spalte (vers2) geschrieben.

Die folgenden beidenen offenen Arbeitsaufträge bearbeiten die Lernenden danach in Teams. Die nachfolgenden Lösungshinweise können für Impulse im Rahmen der offenen Arbeitsphase genutzt werden. Alternativ kann der Auftrag **Minutenschätzen II** genutzt werden.

1. Kannst du belegen, dass sich die Lerngruppe verbessert hat?

2. Kannst du aus diesen Daten schlussfolgern, dass die Lerngruppe aus der ersten Erfahrung gelernt hat, oder könnte das Ergebnis auch rein zufällig entstanden sein?

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

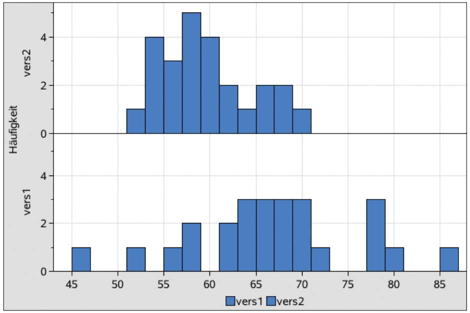
Hinweise zur Lösung

Beschreibende Statistik

Die erste zentrale Frage lautet: *Kann man durch Darstellungen und Kenngrößen belegen, dass die Lernenden aus den Erfahrungen des ersten Versuchs gelernt haben?*

Diese Frage kann mit Mitteln der beschreibenden Stochastik beantwortet werden. Deutlich wird hier der Mehrwert des Rechnereinsatzes. Größere Datenmengen werden schnell übersichtlich dargestellt und können durch Kennzahlen belegt werden.

Die Boxplotdarstellung zeigt am deutlichsten eine Verbesserung. Die Daten liegen im zweiten Versuch näher zusammen und näher an 60. Am Histogramm ist die Ballung der Häufigkeiten um 60 Sekunden gut zu erkennen.



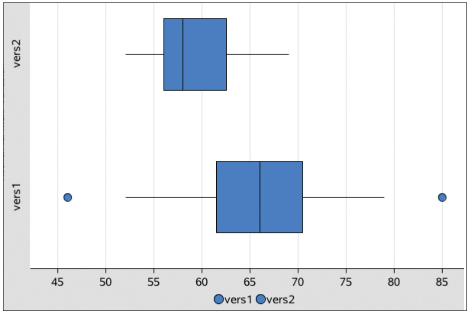


Abbildung 5.8a und 5.8b: Darstellung der Ergebnisse

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Die Kennzahlen belegen diesen Eindruck quantitativ.

Der arithmetische Mittelwert nähert sich der 60. Er sinkt von 66,4 auf 59,2. (Achtung: Ersetzt man einen schwachen Überschätzer (85) durch einen noch schwächeren Unterschätzer (30), dann „verbessert" sich der arithmetische Mittelwert.)

Die Streuung (Varianz, Standardabweichung und Größe der Box) wird deutlich geringer.

	versuch1
Titel	Statistik ...
$\bar{x}$	66.4
Σx	1660.
Σx^2	112142.
$sx := s_{n-}$...	8.93961
$\sigma x := \sigma_n$...	8.759
n	25.
MinX	46.
Q_1X	61.5
MedianX...	66.
Q_3X	70.5
MaxX	85.
SSX := Σ..	1918.

	versuch2
Titel	Statistik ...
$\bar{x}$	59.2
Σx	1480.
Σx^2	88172.
$sx := s_n$...	4.81318
$\sigma x := \sigma_n$...	4.71593
n	25.
MinX	52.
Q_1X	56.
MedianX..	58.
Q_3X	62.5
MaxX	69.
SSX := ...	556.

Abbildung 5.8c und 5.8d: Kennzahlen

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

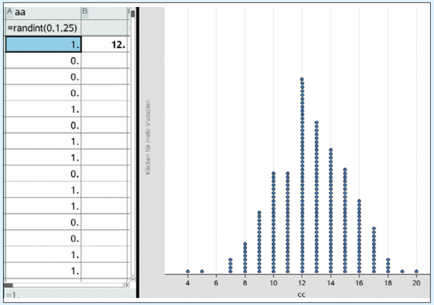


Abbildung 5.8e: Simulationen

Hinweise zur Lösung

Simulationen

Für die zweite Phase ist ein Wechsel der Betrachtung auf die Anzahl der individuellen Verbesserungen notwendig. Z. B. 19 von 25 Lernenden haben sich im zweiten Versuch verbessert oder sind gleich geblieben.

Die zentrale Frage: *Kann man belegen, dass diese Verbesserung nicht zufällig entstanden ist, sondern auf Erfahrungen beruht?* führt in die beurteilende Statistik.

Kernpunkt dieser Phase ist die Einsicht, dass die Verbesserungen durch ein Zufallsexperiment, z. B. dem 25-fachen Münzwurf, simuliert werden können. Die Anzahl der Wappen steht dabei für die Anzahl der Verbesserungen.

Besonders herauszuarbeiten (ohne Rechner) ist die Einsicht, dass eine bestimmte Anzahl von Verbesserungen (hier 19 von 25) dann als nicht zufällig angesehen werden kann, wenn sie in vielen Wiederholungen des Zufallsexperiments nur sehr selten auftritt.

Mit dem Rechner werden viele Simulationen durchgeführt, die Ergebnisse gesammelt und simultan tabellarisch und graphisch dargestellt. Mit den häufigen Wiederholungen des Zufallsexperimentes entsteht so eine Realisierung der Binomialverteilung mit p=0,5. Hier zeigt sich der besondere Mehrwert des Rechnereinsatzes.

MEHRWERT

Das digitale Werkzeug unterstützt die Vorstellung stochastischer Begriffe durch:

- Bildhafte Darstellungen von Datenmengen (ein Bild sagt mehr als 1000 Daten).
- Berechnung von Kennzahlen eines Datensatzes.
- Schnelle Durchführung vieler Simulationen.
- Erkennen, ob ein Ergebnis in vielen Simulationen nur sehr selten oder häufig eintritt.
- Mustererkennung in den Ergebnissen vieler Simulationen.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer
Mit Simulationen zum Hypothesentest

WERKZEUGKOMPETENZEN

Auswahlkompetenz:

Die beiden Aufträge differenzieren je nach Vorerfahrung mit dem Werkzeug. Insbesondere bei Minutenschätzen I haben die Schülerinnen und Schüler vielfältige Möglichkeiten, verschiedene Darstellungen zu nutzen, Kennwerte gezielt zu wählen und dadurch einen Überblick über den Datensatz zu erhalten. Sie wählen daher etwa eine Tabellenkalkulation und verschiedene Diagrammtypen (wie etwa Boxplots) eigenständig und gezielt aus.

Bedienkompetenz:

- Daten eingeben.
- Daten in unterschiedlichen Diagrammen repräsentieren und interpretieren.
- Kennwerte eines Datensatzes berechnen und interpretieren.
- Zufallszahlen (0 und 1) erzeugen und auszählen.
- Daten von Zufallsergebnissen sammeln und graphisch wiedergeben.
- Ergebnisse vieler Simulationen interpretieren.

(Die graphische Darstellung vieler Simulationen kann ggfs. auch als Datei zur Verfügung gestellt werden.)

Dokumentationskompetenz:

Die Schülerinnen und Schüler notieren auf der inhaltlichen Ebene,

- dass durch Vergleiche von Quartilsabständen, Spannweiten, Mediane ... qualitative und quantitative Aussagen über verschiedene Datensätze gewonnen werden können,
- dass Ergebnisse, die in vielen Simulationen nur selten erreicht werden, als nicht zufällige Ergebnisse betrachtet werden, während Ergebnisse dann als zufällig betrachtet werden, wenn sie in vielen Simulationswiederholungen häufig auftreten.

LITERATUR

Riemer, Wolfgang (2013): Lernen aus Erfahrung. In: PM Praxis der Mathematik in der Schule 54(55), S. 25.

Laakmann, Heinz & Langlotz, Hubert (2014): Von der beschreibenden zur beurteilenden Statistik. In: PM Praxis der Mathematik in der Schule 60(56), S. 10.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

www.mnu.de/weko/5-9_einfquadfkt.pdf

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt

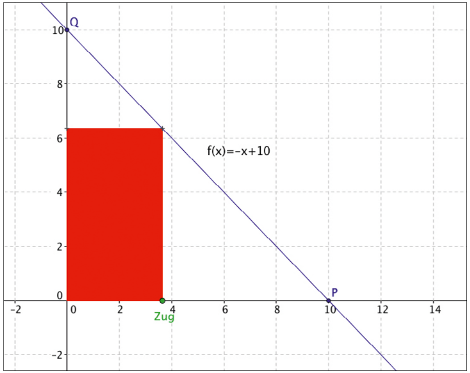
Quadratische Funktionen

5.9 Quadratische Funktionen

Jahrgangsstufe 8 – 9

Funktionen lassen sich als Graph, als Tabelle oder als Term darstellen. Jede dieser Darstellungen fokussiert besondere Eigenschaften. So ist in graphischen Darstellungen besonders gut der Verlauf (die Kovariation) zu erkennen, während in tabellarischen Darstellungen die quantitative Zuordnung im Vordergrund steht.

Der Funktionsterm verbindet sowohl quantitative als auch qualitative Elemente, was aber häufig erst mit Expertenwissen erkennbar ist, weniger in Erkundungssituationen. Der Einstieg in die quadratischen Funktionen zeigt eine Möglichkeit, alle drei Darstellungen schon zu Beginn miteinander zu verknüpfen, damit Lernende eine umfassende und nachhaltige Vorstellung des Begriffs erzeugen können.



Die Suche nach der größten Rechteckfläche eignet sich in besonderem Maße für eine Einführung in die quadratischen Funktionen, weil sie sowohl geometrisch als auch tabellarisch und für Experten auch symbolisch bearbeitet werden kann.

Damit können die wichtigsten Repräsentationen quadratischer Funktionen an einem Beispiel gegenübergestellt und ein vertieftes Verständnis für quadratische Funktionen aufgebaut werden. Die Suche nach dem Maximum nimmt speziell die Veränderung der Funktionswerte in den Fokus und fördert die dynamische Sicht auf Funktionen (Kovariation).

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:

Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Aufgabe: Quadratische Funktionen

Eine Gerade $f(x) = -x + 10$ schneidet die x-Achse und die y-Achse. Zwischen der Geraden und den beiden Achsen liegt ein Rechteck. Ein Rechteckspunkt liegt auf der Geraden und zwei Rechtecksseiten liegen auf den Achsen.

Arbeitsteilige Aufgaben:

Alle:
Zeichne mehrere Rechtecke mit dieser Eigenschaft und berechne den Flächeninhalt.

Gruppe 1:
Untersuche im graphischen Rechnerblatt, wie sich der Flächeninhalt des Recktecks verändert, wenn du systematisch den rechten unteren Rechteckpunkt veränderst. Beschreibe dies möglichst genau.

Verändere im graphischen Rechnerblatt die Gerade und untersuche erneut, wie sich der Flächeninhalt des Recktecks verändert, wenn du systematisch den rechten unteren Rechteckpunkt veränderst. Beschreibe dies möglichst genau.

Gruppe 2:
Erstelle im Tabellenblatt eine Tabelle mit der Schrittweite 0,5, die zu jedem Punkt auf der Geraden, den Flächeninhalt des dazugehörigen Rechtecks angibt. Beschreibe die Veränderung der Flächengröße möglichst genau.

Verändere im Tabellenblatt die Funktionsgleichung der Geraden. Beschreibe erneut die Veränderung der Flächengröße möglichst genau.

Expertengruppen:
Erklärt euch die Ergebnisse aus den graphischen und tabellarischen Gruppen.

Übertragt eure Erkenntnisse auf eine symbolische Funktionsschreibweise $f(x) = \ldots$, die zu jedem x-Wert den entsprechenden Flächenwert angibt.

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt
Quadratische Funktionen

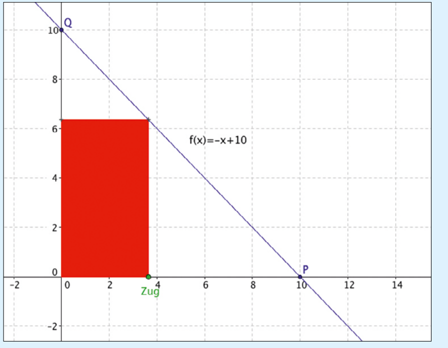


Abbildung 5.9a

VORLIEGENDE DATEIEN

5-9_einfQuadFkt.ggb
www.geogebra.org/m/VqfJuq32

5-9_einfQuadFkt.tns
www.mnu.de/weko/5-9_einfquadfkt.tns

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer
Quadratische Funktionen

VORKENNTNISSE

Die Schülerinnen und Schüler sollten über folgende Kenntnisse verfügen:

- ***eine Ausgangssituation systematisch mit dem Zugmodus verändern***
- ***eine Tabelle systematisch anlegen***

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Hinweise zur Aufgabe

Funktionen in unterschiedlichen Darstellungen
Quadratische Funktionen sind wie alle mathematischen Begriffe abstrakter Natur. Einen direkten Zugriff auf mathematische Begriffe gibt es nicht. Sie benötigen vielmehr Repräsentationen, um mit ihnen arbeiten zu können. So kann mit dem Begriff „quadratische Funktion" erst in einer Darstellung als Parabel, als Funktionsterm, als Wertetabelle o.ä. gearbeitet werden. Und je nach Darstellung werden unterschiedliche Aspekte der quadratischen Funktion fokussiert.

Arbeitsteilige Gruppenarbeit
Der Einstieg in die Gruppenarbeit ist für alle gleich. Mehrere Rechtecke werden mit der Hand eingezeichnet und die Fläche berechnet. Erst im Anschluss daran entwickeln die Lernenden ihr Spezialwissen. Sie entdecken in Ihren Gruppen graphische und tabellarische Eigenschaften quadratischer Funktionen und beschreiben sie möglichst genau.

In der folgenden Expertenrunde tragen sie ihre Erkenntnisse vor und vergleichen sie mit den Entdeckungen der anderen Gruppe.

Hinweise zur Lösung

Eine Verknüpfung der Erkenntnisse mit dem Funktionsterm und der Bezeichnung „quadratische Funktion" erfolgt im Anschluss.

Wesentliche Erkenntnisse bei der Lösung der Aufgabe:

- Aus den graphischen Untersuchungen wird
  a) der Verlauf (die Kovariation) einer quadratischen Funktion qualitativ ermittelt.
  b) die Symmetrie erkannt.
- Aus den tabellarischen Untersuchungen wird
  a) der Verlauf (die Kovariation) einer quadratischen Funktion qualitativ und quantitativ ermittelt.
  b) die Symmetrie erkannt.

- In der Expertenrunde werden die Erkenntnisse der graphischen und der tabellarischen Untersuchung miteinander verbunden.
- Die Untersuchungsergebnisse werden mit dem Funktionsterm verbunden.

MEHRWERT

Das digitale Werkzeug unterstützt die individuelle Entwicklung einer umfassenden Vorstellung des abstrakten Begriffs „quadratische Funktion“ durch

- Darstellung in unterschiedlichen Repräsentationen (als Graph, als Tabelle, und als Term).
- Vergleich der Eigenschaften in verschiedenen Repräsentationen.
- Mustererkennung durch schnelle Änderung der Ausgangssituation.

WERKZEUGKOMPETENZEN

Bedienkompetenz:

- Zugmodus anwenden
- Messen von Flächen und Längen
- Tabellen generieren
- Tabellen graphisch darstellen

Dokumentationskompetenz:

Die Schülerinnen und Schüler notieren auf der inhaltlichen Ebene, dass quadratische Funktionen

- graphisch eine Parabelgestalt haben,
- durch symmetrische Tabellen repräsentiert werden.

LITERATUR

Schmidt, Reinhard (2014): Mit linearen Funktionen und Rechtecken zu quadratischen Funktionen. In: PM Praxis der Mathematik in der Schule 60 (56) S. 14

Laakmann, Heinz (2013): Darstellungen und Darstellungswechsel als Mittel zur Begriffsbildung. Springer Spektrum, Wiesbaden

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

www.mnu.de/weko/5-10_exponentialfunktion.pdf

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt

Parametervariation bei Exponentialfunktionen

Schieberegler erstellen oder nur bedienen?

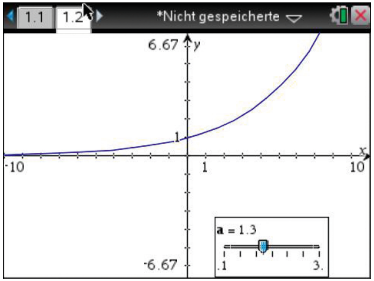
Das Erstellen von Schiebereglern ist keine originäre mathematische Aufgabe. Trotzdem kann es nicht schaden, wenn Schülerinnen und Schüler sie beherrschen. Sie können dann bei zentralen Prüfungen die Abhängigkeit der Lage besonderer Punkte der Graphen einer Funktionsschar sehr schnell und ohne Rechnung erkennen. Speziell auch bei der Untersuchung von Exponentialfunktionen bietet sich diese Technik an.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:

Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

5.10 Parametervariation bei Exponentialfunktionen

Jahrgangsstufe 10 – 11



Exponentialfunktionen sind im Lehrplan der Einführungsphase verankert. Dabei spielen Parametervariationen eine große Rolle. Wenn solche Variationen auch schon zu früheren Zeitpunkten im Unterricht bei anderen Funktionsklassen betrachtet wurden und zu Verschiebungen, Streckungen und Stauchungen der Graphen führten, kommt mit der Variation der Basis ein neuer Gesichtspunkt ins Spiel.

Exponentialfunktionen mit Gleichungen der Form $f(x)=b\cdot a^x$ werden untersucht. Durch Variation des Parameters wird sein Einfluss auf den Funktionsgraphen betrachtet.

Untersucht man auch Gleichungen der Form $f(x)=2^{c\cdot x}$, kommt man zu der wichtigen Erkenntnis, dass für Exponentialfunktionen eine einmal festgelegte Basis ausreichend ist. Das liefert Ideen, die ein Jahr später genutzt werden können, wenn die Zahl *e* als Basis festgeschrieben wird.

Durch Variation der Basis kann die Zahl *e* näherungsweise gefunden werden.

Die abschließende Aufgabe der Sequenz ist in der Qualifikationsphase angesiedelt, da sie die Ableitung von Exponentialfunktionen thematisiert.

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt

Parametervariation bei Exponentialfunktionen

Aufgabe 1: Der Einfluss der Basis

Untersuchen Sie den Einfluss der Basis einer Exponentialfunktion auf den Funktionsgraphen. Verwenden Sie dazu einen Schieberegler für die Variable a im Bereich von 0,1 bis 3 mit einer Schrittweite von 0,1. Definieren Sie die Funktion $f1(x) = a^x$ und variieren Sie den Wert für a.

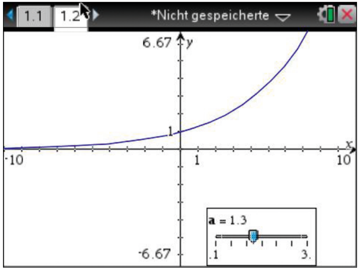


Abbildung 5.10a

a) Geben Sie an, bei welchen Werten von a der Graph steigend bzw. fallend ist.

b) Untersuchen Sie auch den Spezialfall $a = 1$.

c) Formulieren Sie weitere Beobachtungen in der Form: „Je größer a ist, desto ....“

Aufgabe 2: Der Einfluss des Vorfaktors

Untersuchen Sie den Einfluss des Vorfaktors b einer Exponentialfunktion. Erstellen Sie dazu einen Schieberegler für die Variable b im Bereich von 0 bis 4 mit der Schrittweite 0,2. Definieren Sie die Funktion $f1(x) = b \cdot 2^x$ und variieren Sie den Wert von b.

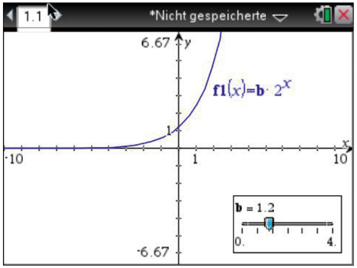


Abbildung 5.10b

a) Orientieren Sie sich bei der Dokumentation Ihrer Beobachtungen an den Aufgabenteilen der vorhergehenden Aufgabe.

b) Beobachten Sie speziell auch, welchen Einfluss der Wert von b auf den Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse hat.

c) Können Sie vorhersagen, wie der Graph aussieht, wenn $b < 0$? Überprüfen Sie Ihre Vorhersage mit dem Rechner.

VORLIEGENDE DATEIEN

AUFGABE 1

5-10_basisvariation.ggb

www.geogebra.org/m/wE2FxAfu

5-10_basisvariation.tns

www.mnu.de/weko/5-10_basisvariation.tns

AUFGABE 2

5-10_faktorvariation.ggb

www.geogebra.org/m/Pf4etT4Y

5-10_faktorvariation.tns

www.mnu.de/weko/5-10_faktorvariation.tns

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:

Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt

Parametervariation bei Exponentialfunktionen

VORLIEGENDE DATEIEN

AUFGABE 3

5-10_streckung.ggb

www.geogebra.org/m/bez9DDd6

5-10_streckung.tns

www.mnu.de/weko/5-10_streckung.tns

AUFGABE 4

5-10_basiswechsel.ggb

www.geogebra.org/m/qZ2yqvYt

5-10_basiswechsel.tns

www.mnu.de/weko/5-10_basiswechsel.tns

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:

Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Aufgabe 3: Streckung und Stauchung

Setzen Sie auf den Graphen Punkte mit den x-Koordinaten 1 und 3. Beobachten Sie, wie sich die y-Koordinaten verändern, wenn b variiert wird.

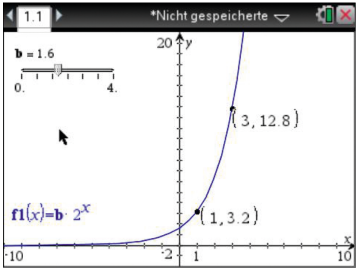


Abbildung 5.10c

Notieren Sie Ihre Beobachtungen in einer Tabelle:

b		1			1,6			
***y*-Koordinate zu *x* = 1**		2			3,2			
***y*-Koordinate zu *x* = 3**					12,8			

Tabelle 5.10a

Aufgabe 4: Eine Basis reicht

„Kennt man die Funktionen mit einer Basis, so kennt man alle.“

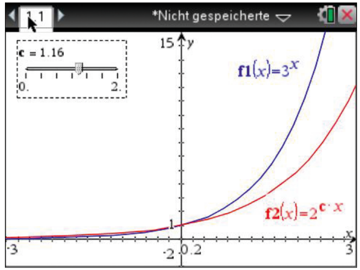


Abbildung 5.10d

Bestätigen Sie dieses Zitat, indem Sie die Funktion mit der Gleichung $f(x) = 3^x$ mit der Basis 2 darstellen. Verwenden Sie dazu eine Funktion des Typs $g(x) = 2^{c \cdot x}$ und bestimmen Sie den Wert für die Variable c.

Aufgabe 5: Verdoppelungszeit

Bei der Funktion mit der Gleichung $f(t)=2^t$ verdoppelt sich der Funktionswert jedes Mal, wenn t um 1 wächst. Die Zeitspanne $\Delta t=1$ kann man daher sinnvollerweise Verdoppelungszeit nennen. Liegt in einer Anwendungssituation jedoch eine andere Verdoppelungszeit vor, muss entweder eine andere Basis gewählt werden oder wie in Aufgabe 4 ein Faktor im Exponenten eingefügt werden.

In der Aufgabe soll es darum gehen, zu vorgegebenen Verdoppelungszeiten die passende Basis der Exponentialfunktion zu bestimmen.

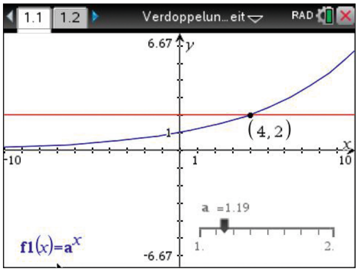


Abbildung 5.10e

a) Begründen Sie, dass in dem Bild zur Verdoppelungszeit 4 die Basis der Exponentialfunktion abgelesen werden kann.

b) Verschieben Sie den Punkt auf der roten Parallelen zur x-Achse und stellen Sie eine andere Verdoppelungszeit ein. Passen Sie die Basis der Exponentialfunktion mit dem Schieberegler an.

c) Dokumentieren Sie Ihre Ergebnisse in Form einer Tabelle.

Verdoppelungszeit				4		
Basis				1,19		

Tabelle 5.10b

d) Bestimmen Sie die Verdoppelungszeit auch durch eine Rechnung.

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt
Parametervariation bei Exponentialfunktionen

VORLIEGENDE DATEIEN

AUFGABE 5

5-10_verdoppelungszeit.ggb
www.geogebra.org/m/CEwMJ2NN

5-10_verdoppelungszeit.tns
www.mnu.de/weko/5-10_verdoppelungszeit.tns

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt
Parametervariation bei Exponentialfunktionen

VORLIEGENDE DATEIEN

AUFGABE 6

5-10_vervielfachungszeit.ggb
www.geogebra.org/m/Qs7EzKXQ

5-10_vervielfachungszeit.tns
www.mnu.de/weko/5-10_vervielfachungszeit.tns

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Aufgabe 6: Vervielfachung

In dieser Aufgabe sollen die Werte einer gegebenen Exponentialfunktion vervielfacht werden. Zu den Vielfachen werden die Zeitpunkte bestimmt.

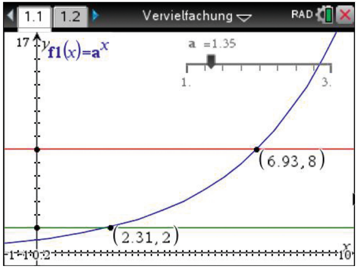


Abbildung 5.10f

a) In der Abbildung wird die Funktion mit der Gleichung $f(x) = 1{,}35^x$ betrachtet. Die Zeiten für die Verdoppelung des y-Wertes, der zum x-Wert 0 gehört, und für die Verachtfachung können abgelesen werden. Fällt Ihnen ein Zusammenhang zwischen den Zeiten auf?

b) Am Schnittpunkt der roten Parallelen zur x-Achse mit der y-Achse kann die rote Linie nach oben oder unten verschoben werden. Damit können andere Vervielfachungen eingestellt werden. Bestimmen Sie weitere Vervielfachungszeiten und dokumentieren Sie diese in Form einer Tabelle.

Basis	1,35					
Vervielfachung	2			8		
Vervielfachungszeit	2,31			6,93		

Tabelle 5.10c

Formulieren Sie eine Gesetzmäßigkeit.

c) Betrachten Sie Exponentialfunktionen mit anderen Basen und dokumentieren Sie auch dort die Vervielfachungszeiten. Prüfen Sie die Gesetzmäßigkeit, die Sie in Teil b) gefunden haben.

Aufgabe 7: Eine gute Basis für Ableitungen

Sie haben kennengelernt, dass sich Funktion und Ableitung bei Exponentialfunktionen vom Typ $f(x) = a^x$ nur durch einen Faktor voneinander unterscheiden. Dieser Faktor ist von der Basis a abhängig und muss für jede Basis ermittelt werden. Für einzelne Basen haben Sie den Faktor durch eine Grenzwertuntersuchung näherungsweise bestimmt. Eine einfache Regelmäßigkeit für den Faktor ist auf den ersten Blick nicht erkennbar.

Basis *a*	2	3	4	5
Faktor	0,693	1,010	1,386	1,609

Tabelle 5.10d

Erkennbar ist, dass der Faktor offensichtlich mit der Basis wächst. Es wäre schön, wenn man eine Basis finden könnte, bei der der Faktor einen einfach zu merkenden Wert hat. Es muss eine Basis geben, die zwischen 2 und 3 liegt, für die der Faktor den Wert 1 hat. Diese Basis soll möglichst genau bestimmt werden.

Dazu muss versucht werden, eine Exponentialfunktion zu finden, die mit ihrer Ableitungsfunktion übereinstimmt.

Definieren Sie die Funktion $f1(x) = a^x$ mit der Gleichung und ihre Ableitungsfunktion. Stellen Sie die Graphen in einem Koordinatensystem dar. Variieren Sie die Basis a mit einem Schieberegler, bis die beiden Graphen übereinstimmen. Bestimmen Sie den Wert für a möglichst genau.

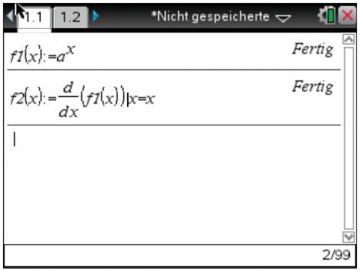


Abbildung 5.10g

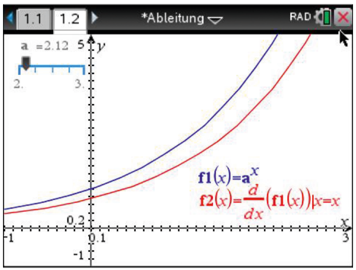


Abbildung 5.10h

VORLIEGENDE DATEIEN

AUFGABE 7

5-10_ableitung.ggb
www.geogebra.org/m/bGt7XZYm

5-10_ableitung.tns
www.mnu.de/weko/5-10_ableitung.tns

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Vorkenntnisse

- *Für diese Aufgabensequenz wird ausschließlich die GTR-Funktionalität benötigt.*
- *Die Schülerinnen und Schüler können Funktionsgraphen mit Hilfe des Rechners darstellen.*
- *Die Schülerinnen und Schüler haben mindestens eine Exponentialfunktion betrachtet, zum Beispiel die Funktion mit der Gleichung $N(t)=2^t$ im Sachzusammenhang eines Bakterienwachstums, bei dem sich die Individuen einmal pro Stunde teilen. Sie haben dabei erkannt, dass der Beginn mit einem Individuum unrealistisch ist, und möchten andere Verdoppelungszeiten verwenden.*
- *Die Lehrkraft gibt die Gestalt $b \cdot a^x$ für den Funktionsterm vor. Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass man den Einfluss von Parametern nur dann beurteilen kann, wenn man einen Parameter variiert und die anderen konstant hält.*
- *Für Aufgabe 7, die in die Qualifikationsphase gehört, wird benötigt, dass man die Ableitung einer Exponentialfunktion bildet, indem man die Funktionsgleichung mit einem geeigneten Faktor multipliziert. Die Schülerinnen und Schüler müssen die Faktoren für einzelne Basen näherungsweise bestimmt haben.*
- *Wünschenswert sind Kenntnisse über das Erstellen von Schiebereglern.*

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Hinweise zur Lösung

Die Aufgaben können jeweils von einem leeren Bildschirm aus bearbeitet werden. In diesem Fall müssen die Schülerinnen und Schüler das Erstellen von Schiebereglern erlernen. Es ist vom Lehrenden zu entscheiden, ob die Zeit für die Einführung dieser Technik investiert werden soll.

Bei zentralen Prüfungen kommen durchaus Aufgaben vor, bei denen die Prüflinge im Zusammenhang mit Funktionsscharen darstellen sollen, welchen Einfluss der Wert eines Parameters etwa auf die Lage der Extrema hat. Bei solchen Fragestellungen kann es von Vorteil sein, wenn die Prüflinge das schnell mit einem Schieberegler testen können.

Als Alternative können die Dateien vom Lehrenden erstellt werden, und die Schülerinnen und Schüler müssen den Schieberegler nur noch bedienen.

Aufgabe 1:

Wenn $a>1$, ist der Graph steigend. Je größer a, desto stärker steigt der Graph.

Wenn $a=1$, ist der Graph eine Parallele zur x-Achse.

Wenn $a<1$, ist der Graph fallend. Je kleiner a, desto stärker fällt der Graph.

Alle Graphen verlaufen durch den Punkt $P(0|1)$.

Aufgabe 2:

a gibt den Abschnitt auf der y-Achse an.

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer

Parametervariation bei Exponentialfunktionen

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Hinweise zur Lösung

Aufgabe 3:

b	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4
***y*-Koordinate zu *x* = 1**	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4	4,4	4,8
***y*-Koordinate zu *x* = 3**	6,4	8	9,6	11,2	12,8	14,4	16	17,6	19,2

Tabelle 5.10e

In jeder Spalte steht das b-fache der Werte aus der Spalte, die zu $b = 1$ gehört.

Es handelt sich um eine Streckung in y-Richtung mit dem Faktor b.

Aufgabe 4:

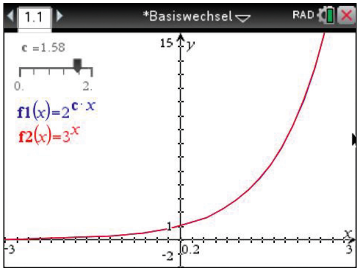


Abbildung 5.10i

Somit hat c etwa den Wert 1.58.

Wenn die Schülerinnen und Schüler mit Logarithmen umgehen können, kann als Erweiterung der Wert von c auch durch Rechnung bestimmt werden:
$3^x = 2^{c \cdot x} \Leftrightarrow x \cdot \lg(3) = c \cdot x \cdot \lg(2) \Leftrightarrow c = \frac{\lg(3)}{\lg(2)} \approx 1{,}58496$
(für $x \neq 0$)

Wird ein CAS-Rechner verwendet, kann die Gleichung vom Rechner direkt gelöst. Mit einem GTR lässt sie sich nur dadurch nach c auflösen, dass für x zunächst ein beliebig gewählter Wert eingesetzt wird.

Aufgabe 5:

In den Aufgaben 1 – 4 wurde das allgemein anwendbare Werkzeug „Schieberegler" intensiv eingesetzt. Daher ist es sinnvoll, dass Schülerinnen und Schüler auch von einem leeren Bildschirm aus arbeiten. In dieser Aufgabe ist das Programm jedoch sehr stark auf die Problemstellung zugeschnitten. Daher ist es hier günstiger, den Schülerinnen und Schülern ein elektronisches Arbeitsblatt anzubieten.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Der Erkenntnisgewinn bei dieser Aufgabe liegt darin, dass die Abnahme des Wertes der Basis bei Vergrößerung der Verdoppelungszeit nicht nach einer intuitiv anzugebenden Gesetzmäßigkeit erfolgt. Schülerinnen und Schüler erwarten an dieser Stelle oft zunächst eine umgekehrte Proportionalität.

a) Der Punkt hat die Koordinaten (4|2). Zum Zeitpunkt 4 liegt der Wert 2, also das Doppelte des Anfangswertes, vor. Die Basis 1,19 kann am Schieberegler mit einer Genauigkeit von zwei Stellen nach dem Komma abgelesen werden.

b)

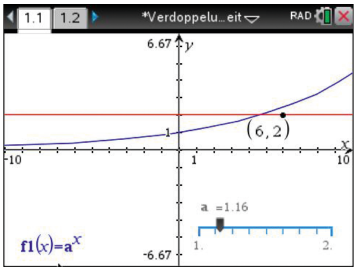


Abbildung 5.10j

Im Bild ist die Verdoppelungszeit auf den Wert 6 eingestellt. Am Schieberegler kann nun die Basis gewählt werden. Der Graph verläuft durch den Punkt (6|2), wenn $a \approx 1{,}12$ eingestellt ist. Dass es sich hierbei um einen Näherungswert handeln muss, zeigt die Umkehrrechnung: $1{,}12^6 \approx 1{,}9738$.

c)

Verdoppelungszeit	2	2,5	3	4	5	6
Basis	1,38	1,32	1,26	1,19	1,15	1,12

Tabelle 5.10f

d) Bezeichnet man die Verdoppelungszeit mit v, so ergibt sich der Ansatz $a^v = 2$ mit der zu bestimmenden Basis a. Aufgelöst nach a ergibt sich $a = \sqrt[v]{2}$, im Fall $v = 4$ also $a = \sqrt[4]{2} \approx 1{,}1892$.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Hinweise zur Lösung

Aufgabe 6:

Auch bei Aufgabe 6 ist ein Arbeiten vom leeren Blatt aus eher nicht sinnvoll.

Diese Aufgabe stärkt das Verständnis für exponentielles Wachstum. Als Gesetzmäßigkeit kann zum Beispiel formuliert werden: „Die Verachtfachungszeit ist dreimal so groß wie die Verdoppelungszeit.“

Aufgabe 7:

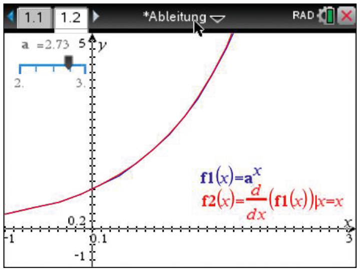


Abbildung 5.10k

Die gesuchte Basis hat den Wert von etwa 2,71.

Der Lehrende muss die Risiken beachten, die in dieser Darstellung liegen. Allgemein ist es nicht sinnvoll, die Graphen einer Funktion und ihrer Ableitungsfunktion in das gleiche Koordinatensystem zu zeichnen, denn beide stellen andere Inhalte dar. Besonders deutlich wird das in Anwendungssituationen, in denen die senkrechte Achse unterschiedlich beschriftet werden müsste: einmal wird die Bestandsfunktion dargestellt und dann die Änderungsratenfunktion.

In diesem Fall ist jedoch das Verziehen, bis die Graphen zur Deckung kommen, so eindrucksvoll, dass man ausnahmsweise einmal die Graphen von Funktion und Ableitungsfunktion in einem Koordinatensystem darstellen sollte.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

MEHRWERT

- Die Dynamik bei der Variation des Parameters unterstützt die eigenständigen Entdeckungen.

WERKZEUGKOMPETENZEN

Bedienkompetenzen:

- Definition einer Funktion mit einem Parameter
- Graphische Darstellung von Funktionen
- Schieberegler erstellen und mit dem Parameter verknüpfen
- Schieberegler bedienen
- Definition der Ableitungsfunktion (bei Aufgabe 7)

Auswahlkompetenz:

- Den Schülerinnen und Schülern wird das Werkzeug vorgegeben.

Reflexionskompetenz:

- Die Schülerinnen und Schüler können durch die Einstellungen der Grenzen des Schiebereglers die gesuchten Werte in den Aufgaben 4 und 5 mit größerer Genauigkeit bestimmen

Dokumentationskompetenz:

- Formulieren der Beobachtungen bei der Parametervariation

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

www.mnu.de/weko/5-11_wachstum.pdf

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt

Wachstum

5.11 Wachstum

Jahrgangsstufe 10 – 11

Mathematische Modelle spielen in der Alltagswelt eine weit größere Rolle, als man auf den ersten Blick meinen könnte. In nahezu allen Wissenschaften werden Modelle eingesetzt, Versicherungen modellieren die Häufigkeit der Schadensfälle, selbst das gesamte Erdklima lässt sich modellieren.

Da ist es nur konsequent, dass auch in der Schule schon an Modellierungssituationen – natürlich anhand deutlich einfacherer Beispiele – gearbeitet wird und insofern das Modellieren auch zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen gehört und dementsprechend auch in den Bildungsstandards verankert wurde.

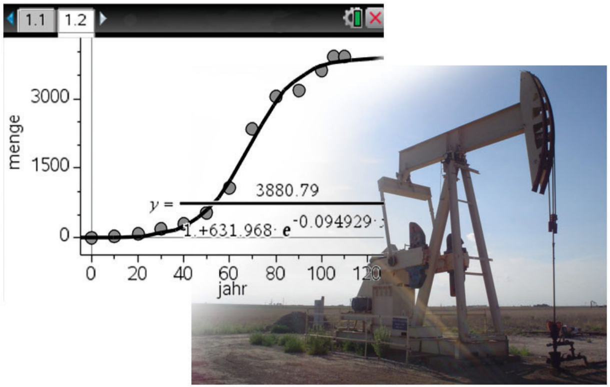


Abbildung 5.11a

Mithilfe eines GTR oder eines vergleichbaren Werkzeugs lassen sich Daten darstellen und durch Regressionsfunktionen anpassen. Hier wird der GTR als Blackbox genutzt. Nicht die Mathematik der Regression steht im Vordergrund, sondern das mathematische Modellieren und insbesondere die Interpretation der Ergebnisse.

Am Beispiel des Erdölverbrauchs der gesamten Menschheit können die Schülerinnen und Schüler Modellfunktionen aufstellen, Vorhersagen machen und die Grenzen der Modellierung erfahren.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Aufgabe: Wie lange reichen die Ölvorräte?

In der Tabelle 5.11a sind die weltweiten Fördermengen an Erdöl für die Jahre 1900 bis 1970 angegeben.

Jahr	Fördermenge in Millionen Tonnen
1900	20,8
1910	45,8
1920	96,3
1930	197,3
1940	300,5
1950	531,5
1960	1072,4

Tabelle 5.11a

a) Stellen Sie den Verlauf der Ölfördermenge graphisch dar. Welche Wachstumsform könnte vorliegen. Begründen Sie Ihre Vermutung.

b) Entwerfen Sie ein mathematisches Modell für den Verlauf der Ölfördermenge in den Jahren 1900 bis 1970.

c) Welche Fördermengen errechnen Sie nach Ihrem Modell für die Jahre 1980, 1990 und 2000? Vergleichen Sie die Werte mit den tatsächlichen Fördermengen in Tabelle 5.11b.

Jahr	Fördermenge in Millionen Tonnen
1980	3037,0
1990	3164,3
2000	3598,6
2005	3907,8
2010	3915,0

Tabelle 5.11b

d) Passen Sie Ihr Modell der veränderten Entwicklung an. Nennen Sie mögliche Gründe für die Änderung im Wachstumsverhalten. Welche langfristige Prognose würden Sie nach Ihrem neuen Modell abgeben?

e) Im Jahr 2002 wurden die noch vorhandenen Erdölreserven auf ca. 164 Milliarden Tonnen geschätzt. Wie lange würden die Reserven noch reichen, wenn Sie Ihr Wachstumsmodell aus Teil d) zugrunde legen?

VORLIEGENDE DATEIEN

Keine. Diese Aufgabe kann vom leeren Bildschirm aus bearbeitet werden.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer
Wachstum

Hinweise zur Lösung

Die Aufgabe eignet sich, um die Möglichkeiten von Regressionsfunktionen in der Einführungsphase bzw. Jahrgangsstufe 11 mit dem GTR zu diskutieren.

Hinweise zur und wesentliche Erkenntnisse bei der Lösung der Aufgabe sind:

Zu a)
Je nach Vorkenntnissen muss hier die Bedienung des Werkzeugs besprochen werden. Wie werden Werte eingegeben? Wie wählt man Regressionsfunktionen aus? Wichtig ist hier die genaue Begründung eines passenden Regressionstyps für Aufgabenteil b).

Eine gute Annäherung wird zunächst augenscheinlich durch eine exponentielle Regression oder eine Regression vierten Grades erzielt.

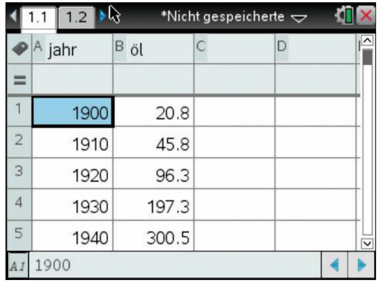


Abbildung 5.11b: Screenshot der Tabelle

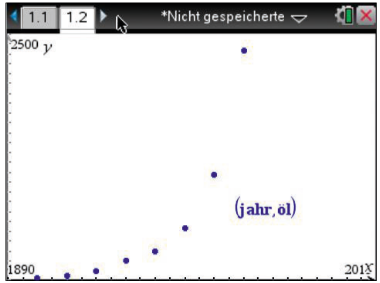


Abbildung 5.11c: Screenshot der Punkte im Koordinatensystem

VORKENNTNISSE

- ***Die Schülerinnen und Schüler sollten verschiedene Wachstumsmodelle, insbesondere lineares, quadratisches und exponentielles (ggf. auch logistisches) Wachstum kennen.***

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Zu b)
Hier lassen sich die Daten sowohl mit einer Potenzfunktion vierten Grades als auch mit einer Exponentialfunktion nahezu perfekt anpassen. Hier sollten die Schülerinnen und Schüler auch kritisch reflektieren, dass Werte jenseits des relevanten Intervalls nicht unbedingt realistische Werte liefern. Die Potenzfunktion liefert hier beispielsweise negative Werte.

Der folgende Screenshot zeigt, dass man etwa mit der Funktion $f(x)=9{,}637\cdot 1{,}06684^x$ einen Korrelationskoeffizienten von $R=0{,}997536$ erhält und die Funktion f die Werte sehr gut annähert.

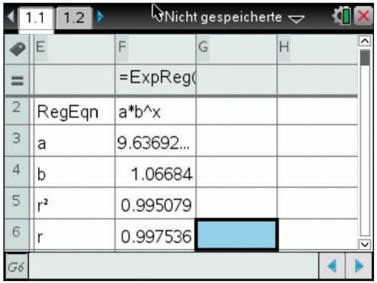


Abbildung 5.11d: Screenshot der Angaben zur Regressionsfunktion

Zu c)
Hier sollten die Schülerinnen und Schüler ermuntert werden, die Regressionsfunktion intern zu speichern und zu benutzen, um sie nicht jedes Mal von Hand neu einzugeben. Mit der Funktion $f(x)=9{,}636\cdot 1{,}06684^x$ erhält man folgende Werte:

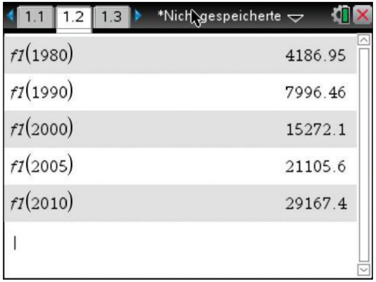


Abbildung 5.11e

Hier erkennt man die Grenzen der exponentiellen Regression direkt, insofern die errechneten Werte weit jenseits einer realistischen Berechnung der tatsächlichen Menge liegen.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer
Wachstum

Hinweise zur Lösung

Zu d)
Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass ihr Modell den neuen Werten nicht entspricht. Nimmt man die neuen Werte hinzu, ergibt sich ein logistisches Wachstum.

Hier muss beachtet werden, dass viele Werkzeuge eine Anpassung der Daten mittels der logistischen Wachstumsfunktion nur durchführen können, wenn als Werte um 1900 verringert werden.

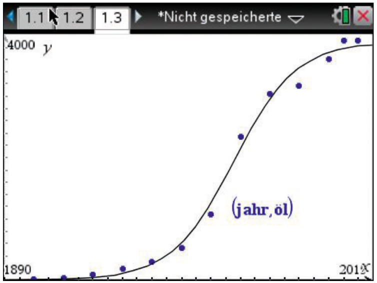


Abbildung 5.11f

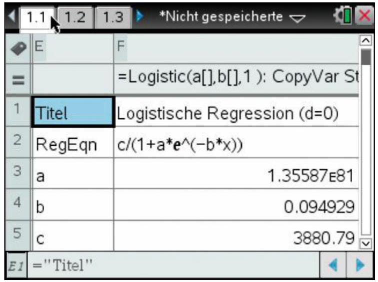


Abbildung 5.11g

Zu e)
Hier müssen die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die Änderungsrate für große Werte kaum noch variiert, d. h. der Ölverbrauch kann als konstant angenommen werden.

MEHRWERT

Hier wird das Anliegen der Bildungsstandards „Mathematisch argumentieren" und „Mathematisch modellieren" realisiert. Die Schülerinnen und Schüler stellen funktionale Zusammenhänge her, nutzen Modellfunktionen zur Prognose und validieren die Güte von

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Regressionsfunktionen. Dies ist ohne Werkzeuge kaum bzw. nur sehr eingeschränkt möglich. Durch den Rechnereinsatz können die Schülerinnen und Schüler verschiedene Modellfunktionen testen und mit den Ausgangsdaten vergleichen. Eine Abschätzung der Güte kann mittels des Bestimmtheitsmaßes (als Blackbox) oder mittels Residuen erfolgen.

Wichtig für die präformale Thematisierung des Bestimmtheitsmaßes im Unterricht ist die Klärung des Bezugs von ermittelter Funktionsgleichung, dem Funktionsgraphen und den zugrundeliegenden Punkten der Wertetabelle.

Durch das Erweitern der Rohdaten erkennen die Schülerinnen und Schüler, dass Modelle Grenzen haben und gegebenenfalls durch neue Modelle ersetzt werden müssen. Auch dies geschieht am Rechner sehr schnell, sodass die Zeit für die Diskussion über das jeweilige Modell verwendet werden kann.

Die Modellierungskompetenz wird gefördert durch:

- reale Daten aus der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler,
- Offenheit der Aufgabe, die ein Experimentieren mit vielen Funktionen erfordert.

Die Kommunikationskompetenz wird gefördert durch:

- Beschreibung mathematischer Sachverhalte in eigenen Worten.

WERKZEUGKOMPETENZ

Die Schülerinnen und Schüler müssen Wertetabellen eingeben und graphisch darstellen können. Sie müssen Datenbereiche zur Regression auswählen können und erhaltene Regressionsfunktionen weiterverarbeiten können.

LITERATUR

Haas, N. & Morath, H.-J. (2006): Anwendungsorientierte Aufgaben für die Sekundarstufe II. Braunschweig: Schroedel.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

www.mnu.de/weko/5-12_tangentenstuecke.pdf

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt

Ableitungsfunktion

Die Bestimmung der lokalen Änderungsrate bzw. der lokalen Steigung des Graphen ist eine Grundaufgabe der Differenzialrechnung. Dies erfolgt in der Regel sehr kalkülorientiert. Der Übergang zur Ableitungsfunktion ist begrifflich bedeutsam und stellt im Unterricht zugleich eine große Herausforderung dar.

Im hier vorgestellten Zugang werden lokale Steigungen nach Augenmaß ermittelt und die Steigungen in geeignete Punkte übertragen. Aus den lokalen Informationen ergibt sich schließlich ein globaler Eindruck und der Schritt zur Ableitungsfunktion.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:

Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

5.12 Ableitungsfunktion – ein handlungsorientierter Zugang

Jahrgangsstufe 10 – 11

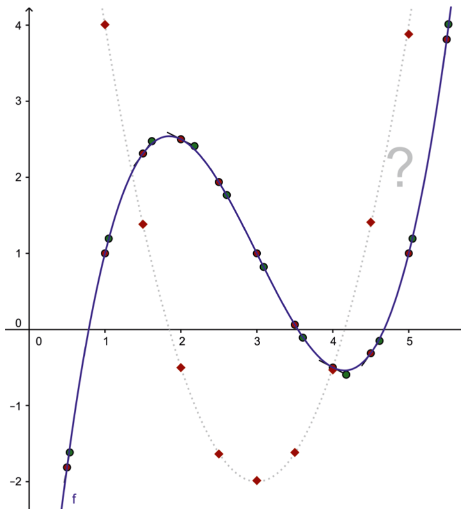


Abbildung 5.12a

In dieser Aufgabe sind in regelmäßigen Abständen an einem Funktionsgraphen Strecken angebracht, die sich drehen lassen. Die Aufgabe besteht dann darin, sie nach Augenmaß so zu drehen, dass sie den Graphen an dieser Stelle möglichst gut approximieren, also tangential werden. Durch das Drehen der Strecken wird weiterhin ein Punkt, der sich in der Ausgangssituation an der gleichen Stelle auf der x-Achse befindet, so bewegt, dass seine y-Koordinate der Steigung der jeweiligen Strecke entspricht.

Dadurch erhält man nicht nur einen lokalen Zugang zur Steigung, sondern die einzelnen lokalen Informationen ergeben in der Gesamtschau auch einen globalen Eindruck, weil die dahinterliegende Ableitungsfunktion sichtbar wird! So wird eine Hypothesenbildung gefördert, z. B. dass die Ableitungsfunktion einer Funktion dritten Grades eine quadratische Funktion sein könnte.

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt

Ableitungsfunktion

Aufgabe: Tangentenstückchen anlegen

Auftrag 1:

In der Datei „tangentenstuecke" sehen Sie einen Funktionsgraphen. Wenn man die kleinen Geradenstückchen (mit den grünen Endpunkten) bewegt, dann bewegen sich die roten Punkte (Quadrate). Die Steigung dieser Geradenstückchen befindet sich in den y-Koordinaten der entsprechenden roten Punkte. Zunächst sind alle Geradenstückchen waagerecht, also Steigung Null.

- Wie verändert sich die Lage der roten Quadrate, wenn Sie die Geradenstückchen so ausrichten, dass sie möglichst gut an den Graphen passen? Welche Zusammenhänge beobachten Sie?
- Betrachten Sie nun die Beziehung einiger besonderer Punkte des Funktionsgraphen (z. B. Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte etc.)? In welcher Beziehung stehen sie zu den roten Quadraten? Versuchen Sie Regeln zu formulieren und diese auch zu begründen.

Auftrag 2:

Wenn man die kleinen Geradenstückchen so ausrichtet, dass sie möglichst gut an den Graphen der Funktion f passen, entstehen durch Auswerten der Geradensteigungen die roten Punkte (Quadrate), die wohl auf einer Linie zu liegen scheinen, die man als Graph einer neuen Funktion f' verstehen kann.

- Erläutern und demonstrieren Sie, wie die neue Funktion f' anschaulich aus der alten Funktion f entsteht.
- Stellen Sie Hypothesen über mögliche Terme der Funktion f_i' (i = 1,2,3) auf, wenn man für die Funktion f_i wählt:
  a) $f_1(x) = x^2$,
  b) $f_2(x) = x^3$,
  c) $f_3(x) = x^4$
- Kontrollieren Sie Ihre Hypothesen, indem Sie die Funktionen mit GeoGebra zeichnen lassen und mit den gezeichneten roten Punkten (Quadraten) vergleichen.

VORLIEGENDE DATEIEN

5-12_tangentenstuecke.ggb

www.geogebra.org/m/WGFvGFkx

5-12_tangentenstuecke.tns

www.mnu.de/weko/5-12_tangentenstuecke.tns

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:

Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer
Ableitungsfunktion

Hinweise zur Lösung

Zum Arbeitsauftrag 1:
Wie verändert sich die Lage der roten Quadrate, wenn Sie die Geradenstückchen so ausrichten, dass sie möglichst gut an den Graphen passen? Welche Zusammenhänge beobachten Sie?

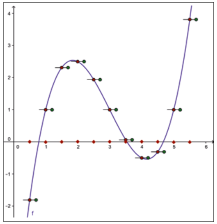


Abbildung 5.12b

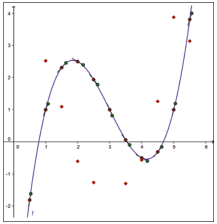


Abbildung 5.12c

Die y-Koordinate der Punkte entspricht jeweils der Steigung der Tangente an der jeweiligen Stelle. Hier sind vielfältige Beziehungen zu beschreiben, zum Beispiel:

a) Je steiler die Tangente, desto größer ist der Abstand des Punktes zur x-Achse.

b) Je größer/kleiner die Steigung der Tangente, desto größer/kleiner ist die y-Koordinate des entsprechenden roten Quadrates.

Tipp 1 auf Tippkarte möglich: Achte auf den Zusammenhang zwischen der Steigung der Geraden und der Lage des Punktes.

Betrachten Sie nun die Beziehung einiger besonderer Punkte des Funktionsgraphen (z. B. Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte etc.)? In welcher Beziehung stehen sie zu den roten Quadraten? Versuchen Sie Regeln zu formulieren und diese auch zu begründen.

Hier können die Schüler und Schülerinnen wesentliche Zusammenhänge zwischen einzelnen Punkten erkennen und mit Hilfe der Tangentensteigung begründen, etwa

- Wenn die Steigung der Tangente gleich 0 ist, dann liegt beim Graphen von f ein Hoch-, Tief- oder Sattelpunkt vor und die y-Koordinate des roten Quadrates ist ebenfalls 0.

VORKENNTNISSE

Die Schülerinnen und Schüler sollten ein anschauliches Verständnis von lokalem „Anpassen" einer Strecke an einen Funktionsgraphen haben und bei Strecken/Geraden den Begriff der Steigung kennen. Es werden keine Kenntnisse von Grenzwerten vorausgesetzt und es werden keine Änderungsraten und auch keine linearen Approximationen berechnet, der Zugang ist graphisch und kalkülfrei! Die Schülerinnen und Schüler lernen das Konzept der lokalen Änderungsrate und Idee der Tangente, z. B. als Grenzlage von Sekanten bzw. als Schmiegegrade, kennen.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Zum Arbeitsauftrag 2:
Wenn man die kleinen Geradenstückchen so ausrichtet, dass sie möglichst gut an den Graphen der Funktion f passen, entstehen durch Auswerten der Geradensteigungen die roten Punkte (Quadrate), die auf dem Graphen einer neuen Funktion f' liegen.

Erläutern und demonstrieren Sie, wie die neue Funktion f' anschaulich aus der alten Funktion f entsteht.

Die neue Funktion entsteht durch die Tangentensteigungen an den jeweiligen Stellen des Funktionsgraphen.

Stellen Sie Hypothesen über mögliche Terme der Funktion f_i' ($i = 1,2,3$) auf, wenn man für die Funktion f_i wählt:
a) $f_1(x) = x^2$,
b) $f_2(x) = x^3$,
c) $f_3(x) = x^4$

Hypothesen:
a) $f_1(x) = 2x$,
b) $f_2(x) = 3x^2$,
c) $f_3(x) = 4x^3$.

Kontrollieren Sie Ihre Hypothesen, indem Sie die Funktionen mit GeoGebra zeichnen lassen und mit den gezeichneten roten Punkten (Quadraten) vergleichen.

Die SuS haben eine direkte Fehlerkontrolle, weil die Punkte entweder auf dem Graphen liegen oder nicht.

MEHRWERT

Funktionaler Zusammenhang:

- Makroanalyse erlaubt den Fokus auf die Funktion als Ganzes.
- Mikroanalyse ermöglicht Fokussierung auf Zuordnungsaspekte (Zusammenhang z. B. von Extremstellen bei f und Nullstellen bei f' etc.).
- Dynamisierung ermöglicht Fokussierung auf Kovariation: Gleich- und gegensinnige Kovariationsaspekte sind bei der Beurteilung des Änderungsverhaltens direkt erlebbar durch die Einstellung der Steigung im Zugmodus.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer

Ableitungsfunktion

Hinweise zur Lösung

Die Schülerinnen und Schüler nutzen das digitale Werkzeug, ...

- ... um eine dynamische Sicht auf den mathematischen Gegenstand zu erhalten
- ... um die Idee der Änderung der Tangentensteigung zu erfahren

WERKZEUGKOMPETENZ

Bedienkompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler ziehen an Punkten (Zugmodus) und legen Geradenstücken tangential an den Funktionsgraphen an.

Reflexions- und Dokumentationskompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler stellen Vermutungen über den Zusammenhang von Tangentensteigungen und Lage der Punkte auf und beschreiben diese etwa so: je steiler die Tangente am Graphen, desto größer ist der Abstand Punktes von der x-Achse.

Außerdem stellen sie Vermutungen über den Zusammenhang zwischen dem Graphen der Funktion und dem Graphen der Steigungsfunktion auf und beschreiben diese etwa so: Die Funktion f ist eine Funktion dritten Grades. Hypothese: Wenn ich die roten Punkte verbinde, erhalte ich einen Funktionsgraphen einer quadratischen Funktion.

Schließlich stellen sie den Zusammenhang besonderer Punkte heraus (Zuordnungsaspekte), beschreiben und begründen diese über die Tangentensteigung etwa so: Wenn der Funktionsgraph einen Hochpunkt hat, ist die y-Koordinate des Punktes an der Stelle gleich Null.

LITERATUR

Schmidt, Reinhard / Riemer, Wolfgang (2013): Grafisch ableiten. Eine „Sternstunde“ zu Beginn der Analysis. In: PM Praxis der Mathematik in der Schule 55 (50). S. 41 – 42

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

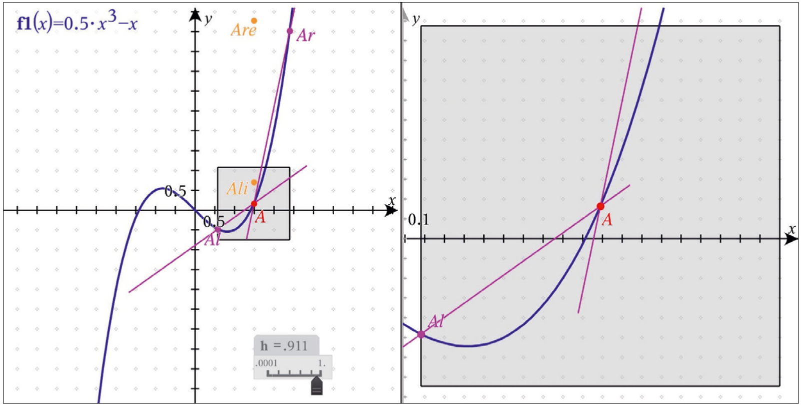
www.mnu.de/weko/5-13_funktionenlupe.pdf

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt

Funktionenlupe

5.13 Funktionenlupe

Jahrgangsstufe 10 – 11



Die Bestimmung der lokalen Änderungsrate bzw. der lokalen Steigung des Graphen ist eine Grundaufgabe der Differenzialrechnung. Dies erfolgt in der Regel sehr kalkülorientiert. Graphische Zugänge sind zwar seit langem bekannt, vom Spiegellineal bis zum Funktionenmikroskop, haben aber den Unterricht nicht wesentlich geprägt. Hier wird eine digitale Erweiterung vorgestellt, die Funktionenlupe. Sie wird zum Funktionenmikroskop 2.0.

Ein bekannter Zugang zur Steigung einer Funktion / eines Funktionsgraphen an einer Stelle *A*, der sich ideal mit dynamischer Software umsetzen lässt, ist das „Funktionenmikroskop", wo man sich solange in den Graphen hinein zoomt, bis der Bildausschnitt linear aussieht. So erhält man lokal einen Wert der Steigung des Funktionsgraphen.

Die Funktionenlupe dynamisiert diesen Ansatz und erweitert ihn durch ein zweites Fenster. Sie ermöglicht so einen lokalen und globalen Blick und führt darüber hinaus zu einem graphischen, kalkülfreien Zugang zur Ableitungsfunktion.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Aufgabe 1: Die Funktionenlupe lokal

Die „Funktionenlupe" bietet zwei Fenster. In einem ist der Graph einer Funktion f und ein Punkt A auf diesem Graphen zu sehen. Um diesen Punkt A gibt es ein Quadrat der Seitenlänge $2h$, das über einen Schieberegler h variiert werden kann. Damit kann man sich in die Umgebung von A „hinein zoomen".

a) Untersuchen Sie damit, wie groß die Steigung des Graphen von f an der Stelle A ist. Wie setzen Sie dafür den Schieberegler h ein?

b) Blenden Sie die Steigungsdreiecke und die Sekanten ein.
Was stellen Sie hier bei den Sekanten und den Steigungsdreiecken fest?

Aufgabe 2: Die Funktionenlupe global

Man kann zur x-Koordinate von A die rechtsseitigen und linksseitigen Steigungswerte als y-Koordinate in Punkte A_l und A_r übertragen. Diese Punkte können eine Ortslinie / einen geometrischen Ort erzeugen.

a) Was stellen Sie hier für größeres h (z. B. $h = 0.5$, $h = 1$) fest?

b) Was stellen Sie hier fest, wenn h immer kleiner und fast Null wird?

c) Lassen Sie diese Punkte A_l und A_r eine Ortslinie abhängig von A erzeugen. Was stellen Sie hier fest, wenn h immer kleiner und fast Null wird?

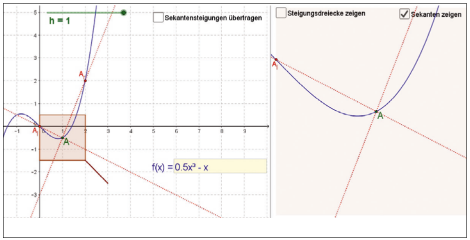


Abbildung 5.13a: Funktionenlupe mit GeoGebra

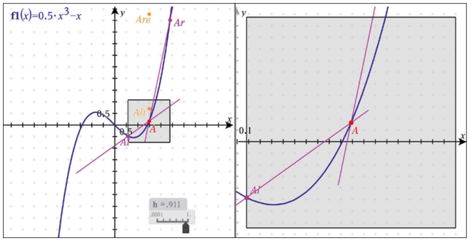


Abbildung 5.13b: Funktionenlupe mit TI-Nspire

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt
Funktionenlupe

VORLIEGENDE DATEIEN

5-13_funktionenlupe.ggb
www.geogebra.org/m/pdgY55Gg

5-13_funktionenlupe.tns
www.mnu.de/weko/5-13_funktionenlupe.tns

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer
Funktionenlupe

VORKENNTNISSE

Die Schülerinnen und Schüler sollten die Steigung von Geraden und Steigungsdreiecke kennen und Sekanten als Geraden durch zwei Punkte auf Funktionsgraphen. Es werden keine Kenntnisse von Grenzwerten vorausgesetzt und es werden keine Änderungsraten und auch keine linearen Approximationen berechnet, der Zugang ist graphisch und kalkülfrei.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Hinweise zur Lösung

Zur Funktionenlupe lokal:

a) Untersuchen Sie damit, wie groß die Steigung des Graphen von f an der Stelle A ist. Wie setzen Sie dafür den Schieberegler h ein?

b) Blenden Sie die Steigungsdreiecke und die Sekanten ein.
Was stellen Sie hier bei den Sekanten und den Steigungsdreiecken fest?

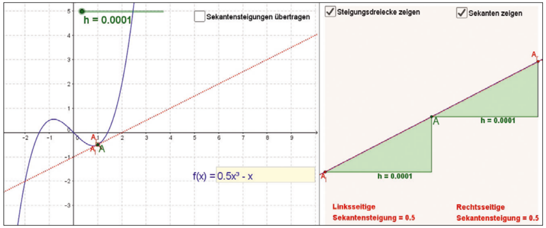


Abbildung 5.13c

Für relativ großes h sind die linksseitige und rechtsseitige Sekante sowie linksseitiges und rechtsseitiges Steigungsdreieck hier unterschiedlich. Je kleiner h wird, desto geringer werden hier die Unterschiede. Für $h = 0.0001$ sind die angezeigten Steigungsdreiecke und Sekanten im Rahmen der Bildschirmgenauigkeit nicht mehr auseinanderzuhalten.

Die Sekanten verschmelzen zur anschaulichen Tangente und die Steigungsdreiecke liefern (näherungsweise) die Steigung des Graphen der Funktion f am Punkt A.

Diejenigen Funktionen, bei denen dieser Zugang so erfolgt, werden dann „differenzierbar" genannt.

Natürlich muss dann auch ein Gegenbeispiel thematisiert werden. Der Funktionsterm kann einfach in $|x|$ geändert werden. Zieht man A in den Ursprung des Koordinatensystems, so sieht man beim Zoomen mittels h deutlich, dass die Steigungen und Sekanten sich nicht annähern. Der „Knick" im Graphen bleibt und kann durch kein Zoomen geglättet werden.

Wesentlich ist bei diesem Zugang, dass das Augenmerk auf dem rechten, lokalen Fenster liegt.

Zur Funktionenlupe global:

a) Was stellen Sie hier für größeres *h* (z. B. $h = 0.5$, $h = 1$) fest?

b) Was stellen Sie hier fest, wenn *h* immer kleiner und fast Null wird?

c) Lassen Sie diese Punkte A_l und A_r eine Ortslinie abhängig von *A* erzeugen.
Was stellen Sie hier fest, wenn *h* immer kleiner und fast Null wird?

Für relativ großes *h* sind A_l und A_r hier deutlich unterschiedlich. Wenn *h* immer näher an Null kommt, verschwinden diese Unterschiede und die beiden Punkte A_l und A_r fallen im Rahmen der Bildschirmauflösung zusammen. Ihre Ortslinien sind die Graphen der linksseitigen bzw. rechtsseitigen Sekantensteigungsfunktionen, die dann für sehr kleines *h* auch anschaulich zusammenfallen und anschaulich zum Graphen der Tangentensteigungsfunktion werden.

Das Augenmerk liegt hier mehr auf dem linken, globalen Fenster.

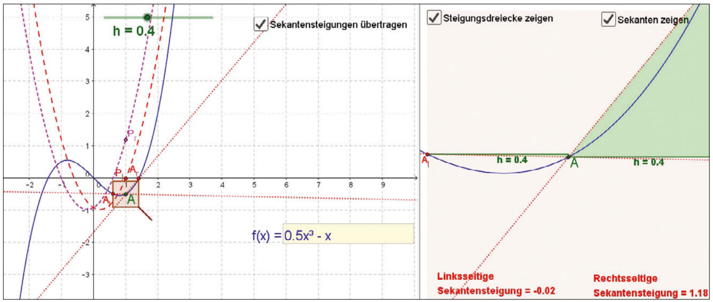


Abbildung 5.13d

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

LITERATUR

Elschenbroich, H.-J. (2015): Anschauliche Differenzialrechnung mit der Funktionenlupe. In: MNU Journal, Heft 5/1026. S. 273–277

Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. (2014): Funktionen unter der Lupe. MatheWelt 187. Friedrich Verlag.

Elschenbroich, H.-J., Seebach, G., Schmidt, Reinhard (2014): Die digitale Funktionenlupe. Ein neuer Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. In: Elschenbroich, H.-J., Henn, W. (Hrsg.): Funktionen analysieren. Mathematik lehren 187. S. 34–37. Friedrich Verlag.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Hinweise zur Lösung

MEHRWERT

Die Schülerinnen und Schüler gewinnen einen anschaulichen, kalkülfreien graphischen Zugang zu Steigung und Steigungsfunktion. Dabei können Funktion f und Stelle A beliebig verändert werden.

Der Übergang von der lokalen Steigung zur Steigungsfunktion (graphisch als Ortslinie) geschieht hier intuitiv und problemlos, was ohne ein solches Werkzeug so nicht möglich gewesen wäre.

Auf diese Weise werden Grundvorstellungen gebildet, auf denen dann ein Kalkül der Differenzialrechnung aufbauen kann.

Sicherheitshalber sei noch betont, dass es nicht um den Ersatz des Differenzialrechnungskalküls geht, sondern diesem eine anschauliche Grundlage gegeben werden soll, damit nicht verständnislos und unverstanden gerechnet wird.

WERKZEUGKOMPETENZ

Bedienkompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- ziehen an Punkten (Zugmodus), bedienen Kontrollkästchen, erzeugen Ortslinien.

Reflexions- und Dokumentationskompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- verstehen die lokale Steigung einer gekrümmten Kurve anschaulich als Steigung des im Vergrößerungsprozess sichtbaren, schließlich gerade erscheinenden Graphenstücks,
- erkennen, dass man durch dynamische Veränderung von A die (noch von h abhängigen) Graphen der Sekantensteigungsfunktionen als Ortslinien gewinnen kann und dass diese für h gegen Null anschaulich zum Graphen der Tangentensteigungsfunktion verschmelzen.

Mathematik und Physik Verstehen & Üben

www.KLSoft.de

Die gesamte Schulmathematik & Physik als vollständiges Softwarepaket:
- alle Klassen und Jahrgangsstufen mit interaktiven Übungseinheiten & Lernseiten
- Zusatzpakete mit Aufgabenbättern, Abitur - und Projektaufgaben
- zahlreiche Werkzeuge

Ausführliche Informationen und Demoversionen finden Sie auf unserer Homepage: www.KLSoft.de

Wenn Sie unsere Software in einer Fachkonferenz Ihrer Schule vorstellen, erhalten Sie als Dankeschön eine Test-CD im Wert von 10 €.
Bestellung per email: Kontakt@KLSoft.de
Gutschein-Code: Fachkonferenz2017

Es fallen nur 3 Euro Versandkosten an.
Gültig bis 31.12.2017

www.mnu.de/weko/5-14_differentialrechnung.pdf

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt

Einstieg in die Differentialrechnung

5.14 Einstieg in die Differentialrechnung

Jahrgangsstufe 10 – 11

Die Lernenden nutzen hier durch eine Funktion modellierte Wetterdaten als Ausgangspunkt für mathematisch substanzhaltige Fragestellungen. Von diesen ausgehend wird ein Einstieg in die Differentialrechnung ermöglicht. Das CAS wird eingesetzt, um Schülerinnen und Schüler in der Phase der Erarbeitung des Ableitungsbegriffs von den sonst erforderlichen umfangreichen algebraischen Umformungen zu entlasten. Dadurch ergeben sich folgende Vorteile:

- Konzentration auf den neu zu lernenden Begriff
- Einsatz von Anwendungssituationen, die auch durch komplexere Funktionen beschreiben werden
- Keine Notwendigkeit einer sehr frühen Erarbeitung der Ableitungsregeln

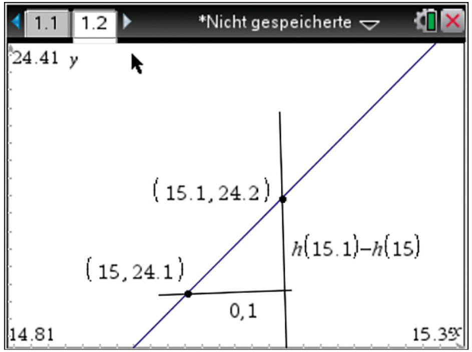


Abbildung 5.14

Eine nachhaltige Festigung des Ableitungsbegriffs wird durch das Zurückgreifen auf den Differenzenquotienten ermöglicht. Somit kann die Aufgabe als Ausgangspunkt dienen für die Bildung von Ableitungen bei der Bearbeitung relevanter Fragestellungen zu einem gegebenen funktionalen Zusammenhang.

Was ist eine Ableitung?

Viele Schülerinnen und Schüler erklären das ganz einfach: „Ableitung ist Exponent nach vorne und Exponent um eins herunter."

Spätestens bei den Exponentialfunktionen rächt sich diese Verwechselung des Ableitungsbegriffs mit der Ableitungsregel für ganzrationale Funktionen. Mit der Verwendung eines CAS bekommen die Ableitungsregeln einen geringeren Stellenwert.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:

Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Aufgabe: Wetterdaten

Situationsbeschreibung:

An einer meteorologischen Messstation werden verschiedene Wetterdaten erhoben. Unter anderem wird auch die Regenmenge registriert. In einem oben offenen Glasrohr kann abgelesen werden, wie hoch der Regenwasserstand ist.

Wird zu verschiedenen Zeitpunkten die Höhe des Wasserstandes registriert, ergibt sich eine Wasserstandsfunktion.

Die folgende Tabelle zeigt einige Messwerte an:

Man kann versuchen, die Messpunkte durch einen Funktionsgraphen anzunähern. Im betrachteten Beispiel liegen die Messpunkte so, dass ihre Lage durch den Graphen der Funktion mit der Gleichung

$$h(t) = \frac{t^3}{300} - \frac{t^2}{7} + 4t$$

im Zeitintervall [0; 24] beschrieben werden kann.

Dabei wird h in mm und t in Stunden gemessen.

Auftrag:
Formulieren Sie sinnvolle Fragen, die in dieser Situation gestellt werden können. Geben Sie zu den Fragen Lösungsansätze an.

Zeit in Stunden	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Höhe des Wasserstandes in mm	0	1,5	3	4,5	6	7,6	9,2	10,8	12,5

Tabelle 5.14

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt
Einstieg in die Differentialrechnung

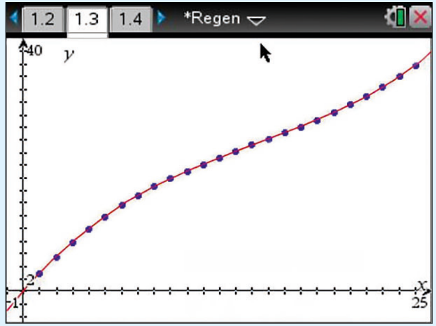


Abbildung 5.14a

VORLIEGENDE DATEIEN

Keine. Die Schülerinnen und Schüler arbeiten im Rahmen dieses Kontextes explorativ mit ihrem CAS.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
*Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz*

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer

Einstieg in die Differentialrechnung

VORKENNTNISSE

- ***Die Schülerinnen und Schüler haben einen anschaulichen Grenzwertbegriff.***
- ***Sie haben im Zusammenhang mit den linearen Funktionen den Begriff der Änderungsrate kennen gelernt.***
- ***Der Einsatz eines CAS ist für den kompletten Unterrichtsgang erforderlich. Verzichtet man auf die Rechnerunterstützung bei der Grenzwertberechnung, reicht ein GTR.***

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Hinweise zur Lösung

Bei der Stellung der Aufgabe ist es wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler darauf hingewiesen werden, dass es sich nicht um realistischen Regen handelt. In der Realität wird es niemals so regnen, wie es durch die Funktion dritten Grades suggeriert wird. Erfahrungsgemäß kommt es jedoch nicht vor, dass die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe ablehnen und stattdessen auf einer realistischen Funktion bestehen.

Wegen der sehr offenen Fragestellung ist es nicht möglich, die von den Schülerinnen und Schülern formulierten Fragen, die in der Situation relevant sind, genau vorherzusehen.

Alle Fragen werden zunächst gesammelt. Viele dieser Fragen lassen sich mit den Mathematikkenntnissen der Sekundarstufe I beantworten und zielen noch nicht auf die Differentialrechnung. Die Bearbeitung der einfachen Fragen kann dazu dienen, die Schülerinnen und Schüler mit dem Umgang mit einem CAS bzw. GTR vertraut zu machen, wenn sie vorher noch nicht damit gearbeitet haben.

Aus der Erfahrung werden Fragen der folgenden Art genannt:

- Wie hoch steht das Wasser nach 5 Stunden?
- Wann steht das Wasser 8 mm hoch?
- Wie stark ist das Wasser im Zeitraum von 2 bis 6 Stunden gestiegen?
- Wann hat es besonders stark geregnet?

Dabei zielt die letzte Frage, die oft ganz zu Beginn von den Schülerinnen und Schülern gestellt wird, auf die Differentialrechnung. Die Fragen nach dem Zeitpunkt erfordern das Lösen einer Gleichung und sind daher schwieriger zu bearbeiten als die Fragen nach einem Wert. Daher empfiehlt es sich, an dieser Stelle die Frage nach dem Vergleich der Heftigkeit des Regens zu zwei konkret vorgegebenen Zeitpunkten zusätzlich zu stellen. Diese Frage stellen Schülerinnen und Schüler meistens nicht.

Die Fragen, die dazu dienen, den Umgang mit dem CAS (bzw. GTR) einzuüben, können vielfach auch mit einfacheren Hilfsmitteln, ja teilweise auch nur mit Papier und Stift, beantwortet werden. Je nach Vorschlägen der Lerngruppe ist eine algebraische oder eine graphische Bearbeitung möglich.

Algebraische Lösung

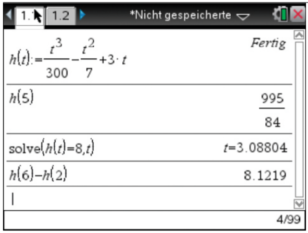


Abbildung 5.14b

Geometrische Lösung

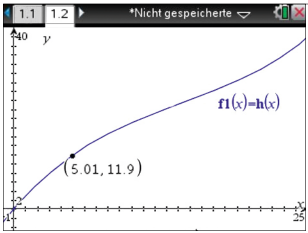


Abbildung 5.14c

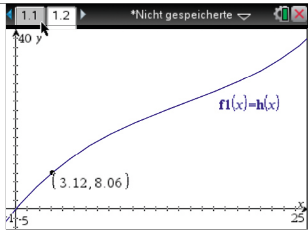


Abbildung 5.14d

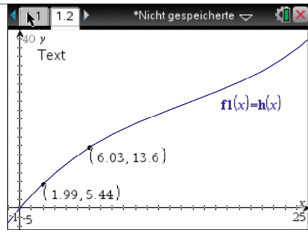


Abbildung 5.14e

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Hinweise zur Lösung

Durch Übungen ohne Sachkontext mit einfacheren Funktionen muss sichergestellt werden, dass die Bearbeitung solcher Problemstellungen auch ohne elektronisches Hilfsmittel geleistet werden kann.

Die Fragestellungen, die nun zur Differentialrechnung führen, lassen sich mit Hilfe des CAS (oder GTR) ohne großen Rechenaufwand erforschen. Eventuell stellt die Lehrkraft die Aufgabe, die Heftigkeit des Regens zu zwei Zeitpunkten miteinander zu vergleichen. Im Beispiel sollen die Zeitpunkte 15.00 Uhr und 16.00 Uhr betrachtet werden.

Der häufig als erstes erprobte Ansatz, $h(15)$ und $h(16)$ zu berechnen, um die Heftigkeit des Regens zu diesen Zeitpunkten miteinander zu vergleichen, wird schnell verworfen und durch die Idee, den Zuwachs in Intervallen zu berechnen, ersetzt.

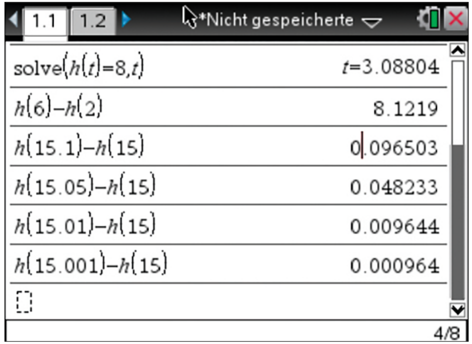


Abbildung 5.14f

Die Schülerinnen und Schüler erfahren, dass der Höhenzuwachs umso kleiner wird, je kürzer das Zeitintervall ist. Dadurch sind die Ergebnisse aus unterschiedlich langen Intervallen nicht mehr unmittelbar vergleichbar. Eine Lösung ist das Hochrechnen auf einen gemeinsamen Zeitraum, etwa eine Stunde.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

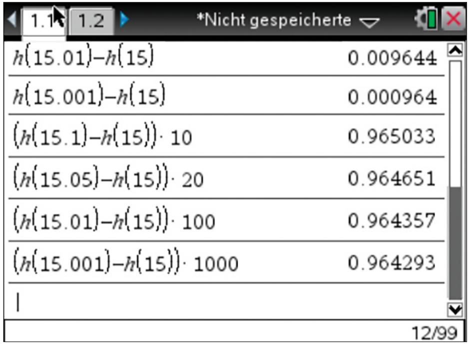


Abbildung 5.14g

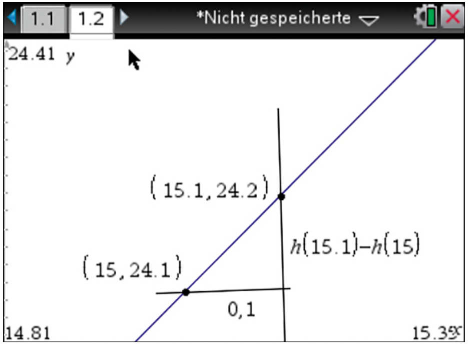


Abbildung 5.14h

Die Zahlen sind dadurch vergleichbar geworden. Die Schülerinnen und Schüler gewinnen die Einsicht, dass bei weiterer Verkürzung des Zeitintervalls keine wesentlichen Änderungen mehr erfolgen. Die Heftigkeit des Regens um 15.00 Uhr kann durch den Wert 0,96429 mm/h näherungsweise erfasst werden.

Der Vergleich mit dem Wert 0,98858 mm/h für 16.00 Uhr liefert die Einsicht, dass es um 16.00 Uhr heftiger geregnet hat als um 15.00 Uhr. Im Rahmen einer sinnvollen Genauigkeit ist das Problem damit gelöst.

Die Rechnungen lassen sich graphisch visualisieren. Dadurch wird dann auch die mathematisch übliche Schreibweise als Quotient nahegelegt. Zusätzlich ergibt sich die Interpretation als Sekantensteigung.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer
Einstieg in die Differentialrechnung

Hinweise zur Lösung

Die Frage nach dem Zeitpunkt der größten Heftigkeit des Regens lässt sich prinzipiell durch Berechnung für viele verschiedene Zeitpunkte mit hinreichender Genauigkeit beantworten. Aus der geometrischen Erkenntnis über den Zusammenhang mit der Sekantensteigung ist auch eine genaue Beobachtung des Graphen unter dem Gesichtspunkt der Steigung erfolgversprechend.

Alle diese Ideen erfordern jedoch einen großen Zeit- bzw. Rechenaufwand. Gerade dieses Argument ist für Schülerinnen und Schüler überzeugend, sich darauf einzulassen, den exakten Wert der Heftigkeit des Regens zu einem Zeitpunkt zu bestimmen, obwohl er in keiner Anwendungssituation von realem Interesse ist.

Die Erfahrung des Grenzwertes haben die Schülerinnen und Schüler durch die Berechnung vieler durchschnittlicher Regenheftigkeiten bereits gemacht. Das ist jetzt nur noch zu präzisieren. Von dieser Stelle an kann der GTR keine Hilfe mehr liefern. Wenn man hier weiterarbeiten möchte, ist der CAS-Einsatz unabdingbar.

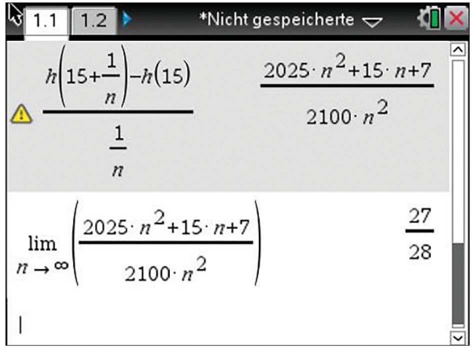


Abbildung 5.14i

Zunächst sind die unendlich vielen durchschnittlichen Heftigkeiten durch einen Term darzustellen. Die algebraische Vereinfachung des Terms übernimmt das CAS. Wenn die Schülerinnen und Schüler in der Lage sind, den Grenzwert direkt abzulesen, kann auf den Grenzwert-Befehl des CAS verzichtet werden.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

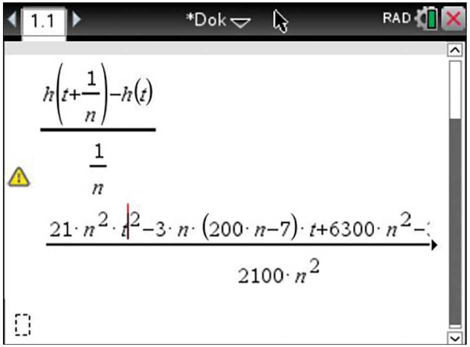


Abbildung 5.14j

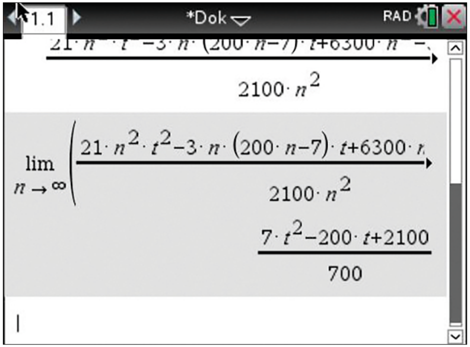


Abbildung 5.14k

Um nun auf den Zeitpunkt der größten Heftigkeit des Regens zu kommen, ist eine Verallgemeinerung auf alle Zeitpunkte erforderlich.

Nach Bildung des Grenzwertes wird die Ableitungsfunktion angegeben.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer
Einstieg in die Differentialrechnung

Hinweise zur Lösung

Da die Parabel mit der Gleichung

$$r(t) = \frac{7t^2 - 200t + 2100}{700}$$

nach oben geöffnet ist, liefert der Scheitelpunkt die Information über den Zeitpunkt mit der geringsten Regenheftigkeit. Der stärkste Regen liegt daher an den Rändern des Intervalls vor. Dieses ist zugleich eine gute Vorbereitung auf die im Zentralabitur so beliebten Bestimmungen der Randextrema.

Die Bestimmung des Scheitelpunktes kann zwar durch das CAS auf Knopfdruck erledigt werden. Dabei handelt es sich jedoch um einen Missbrauch des Werkzeuges. An dieser Stelle sollte das CAS nur im Notfall eingesetzt werden.

Dokumentationsvariante

Je nach Unterrichtskultur ist es möglich, die Werkzeugsprache zur Dokumentation der Prozessbearbeitung der Schülerinnen und Schüler zu nutzen. Die Screenshots oben machen deutlich, dass wesentliche Elemente der Werkzeugsprache denen der Fachsprache gleichen: So gleicht etwa der Limes-Befehl hinsichtlich seiner syntaktischen Struktur beim CAS den üblichen mathematischen Schreibweisen. Damit die Schülerinnen und Schüler auch deutlich machen, inwiefern das CAS bei der Lösungsfindung zum Einsatz kommt, kann z. B. der solve-Befehl an zentralen Stellen im Heft als solcher dokumentiert werden, etwa:

(CAS): solve $(h(t) = 8, t)$ liefert das Ergebnis $t = 3$.

Die Kraft des solve-Befehls bei der Dokumentation des Bearbeitungsprozesses liegt darin begründet, dass er sowohl deutlich macht, inwiefern die Schülerinnen und Schüler das digitale Werkzeug in diesem Bearbeitungsschritt genutzt haben, als auch die mathematische Struktur des dahinter liegenden Lösungsansatzes (nämlich das Lösen der Gleichung $h(t) = 8$) explizit benennt.

MEHRWERT

- Konzentration auf den neu zu lernenden Begriff
- Einsatz von Anwendungssituationen, die auch durch komplexere Funktionen beschrieben werden

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

- Keine Notwendigkeit einer sehr frühen Erarbeitung der Ableitungsregeln

Nachhaltige Festigung des Ableitungsbegriffs durch Zurückgreifen auf den Differenzenquotienten als Ausgangspunkt für die Bildung von Ableitungen bei der Bearbeitung relevanter Aufgaben über einen längeren Zeitraum

WERKZEUGKOMPETENZ

Bedienkompetenzen:

- Definition einer Funktion
- Berechnung von Funktionswerten
- Lösen von Gleichungen
- Grenzwertbestimmung
- Funktionsgraphen zeichnen
- Punkt auf einen Graphen setzen
- Punkt ziehen
- Fenstereinstellungen und Zoom

Auswahlkompetenz:

- Entscheidung zwischen Algebra- und Geometriewerkzeug

Reflexionskompetenz:

- Grenzen und Potentiale der jeweiligen Darstellungsebene werden diskutiert

Dokumentationskompetenz:

- Dokumentation und Begründung der Wahl des Werkzeuges
- Dokumentation des Bearbeitungsweges (z. B. solve-Befehl)
- Ggf. Skizzierung des Graphen und Dokumentation der Vorgehensweise
- Zusammenhänge zwischen Lösung und Daten des Rechners (z. B. Ablesen von Koordinaten und Interpretation)

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

www.mnu.de/weko/5-15_dateidownload.pdf

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt

Einführung in die Integralrechnung

Zwei zentrale Grundvorstellungen der Integralrechnung sind Kumulation und Gesamteffekt. Diese Ideen werden im Rahmen der vorliegenden Einführung in die Integralrechnung anhand von Übertragungsraten beim Download von Dateien mit dem Computer thematisiert.

Dabei können intuitive Fragen nach der Downloadgeschwindigkeit oder der Größe der Dateien zu den wichtigen Konzepten der Integralrechnung führen.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

5.15 Einführung in die Integralrechnung

Jahrgangsstufe 11 – 12

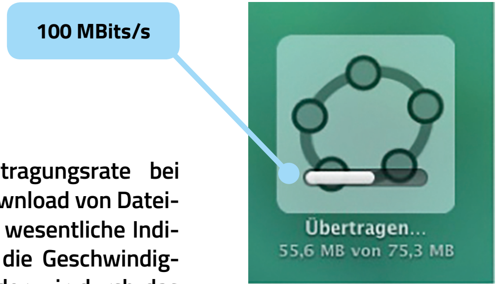


Abbildung 5.15

Die Übertragungsrate bei einem Download von Dateien ist der wesentliche Indikator für die Geschwindigkeit, mit der wir durch das Netz surfen. Die Anbieter von Internettarifen werben dabei mit Begriffen wie Highspeed Surfen und Maximalen Surfgeschwindigkeiten. Dieser Kontext wird genutzt, um die zentralen Konzepte der Integralrechnung eigenständig zu erkunden.

Es ist eine der Ideen dieser Einführung, dass die Konzepte der Differentialrechnung nicht notwendigerweise zuvor behandelt worden sein müssen. Auf einem elementaren Niveau beschäftigen sich die Schülerinnen und Schüler hier mit Fragen nach der Gesamtgröße von Dateien und unterschiedlichen, hinsichtlich des Komplexitätsniveaus ansteigenden Szenarien der mathematischen Modellierung von Downloads aus dem Internet.

Die Beispiele illustrieren unterschiedliche Zugänge zum Integralbegriff, bei dem tabellarische, symbolisch-numerische oder visuelle Zugänge zum Integralbegriff genutzt werden können.

Aufgabe: Download einer Datei

Wir betrachten in dieser Aufgabe den Download einer Datei. Beim Download wird üblicherweise die Übertragungsrate angegeben.

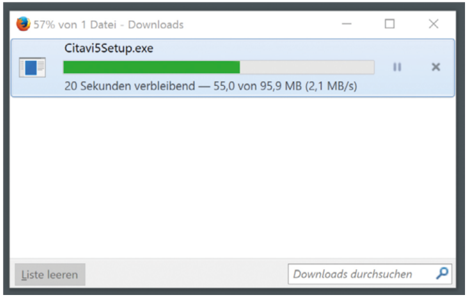


Abbildung 5.15a

Die Übertragungsrate betrage 1,2 MB/s. Der ganze Übertragungsvorgang dauert 14,6 s. Berechnen Sie die Größe der Datei.

Aufgabe: Leitungsstörung: Unterschiedliche Übertragungsraten

Häufig kann es in der Realität passieren, dass die Übertragungsraten schwanken.

Die Übertragungsrate betrage in den ersten zwei Sekunden 1,2 MB/s. Danach betrage sie 8 Sekunden lang 0,9 MB/s. In den letzten 6 Sekunden betrage sie 1,3 MB/s. Berechnen Sie auch für diesen Übertragungsvorgang die Größe der Datei.

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt
Einführung in die Integralrechnung

VORLIEGENDE DATEIEN

Im Rahmen dieser Aufgabe nutzen die Schülerinnen und Schüler das digitale Werkzeug als Hilfsmittel für algebraische Operationen und zur Visualisierung des funktionalen Zusammenhangs. Insofern wird hier keine vorliegende Datei benötigt.

In der Datei 5-15_dateidownload.tns wird ein exemplarischer Lösungsgang der Teilaufgabe Download einer großen Datei gezeigt.

5-15_dateidownload.ggb
www.geogebra.org/m/K7SNMhCm

5-15_dateidownload.tns
www.mnu.de/weko/5-15_dateidownload.tns

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Aufgabe: Download bei schwankender Übertragungsrate

In der Realität ändert sich die Übertragungsrate in der Regel nicht sprunghaft. Die Übertragungsrate soll jetzt durch eine Funktion ohne Sprünge gegeben sein:

$$u(t) = -\frac{t^2}{160} + \frac{t}{10} + \frac{2}{5}.$$

Die Dauer des Übertragungsvorgangs beträgt 16 s. Bestimmen Sie auch dafür die Größe der Datei.

Zunächst versucht man, die gesuchte Größe näherungsweise zu bestimmen. In den ersten 4 Sekunden liegt die Übertragungsrate zwischen 0,4 MB/s und 0,7 MB/s.

a) Begründen Sie diese Werte.

Wenn man so tut, als wäre die Rate in dieser Zeit konstant bei 0,55 MB/s, wird man keinen allzu großen Fehler machen, und man kann davon ausgehen, dass in dieser Zeit 2,2 MB übertragen werden.

Die Werte sind in Tabelle 5.15a übersichtlich dargestellt.

b) Füllen Sie die freien Felder der Tabelle aus und bestimmen Sie einen Näherungswert für die gesamte Datenmenge.

c) Überlegen Sie, wie Sie den Näherungswert verbessern können, und bestimmen Sie einen besseren Näherungswert.

Zeitspanne	Rate liegt zwischen	angenommener konstanter Wert	Näherungswert für die Datenmenge in der Zeitspanne
0 s – 4 s	0,4 MB/s und 0,7 MB/s	0,55 MB/s	2,2 MB
4 s – 8 s			

Tabelle 5.15a

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Aufgabe: Download einer großen Datei

Gerade beim Download größerer Dateien ist es unrealistisch, dass die Übertragungsrate über eine längere Zeitspanne konstant bleibt. Daher wird die Aufgabe jetzt etwas realistischer.

Berechnen Sie auch für diesen Übertragungsvorgang die Größe der Datei.

Die Übertragungsrate wurde alle 20 s erfasst. Die Tabelle zeigt diese Werte

Übertragen Sie die Tabelle in die Tabellenkalkulation und berechnen Sie auf geeignete Weise die Größe der Datei.

***t* in s**	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260
Rate in MB/s	2	4	6	6	6	6	5.5	4.8	4	3	1.6	0.2	0

Tabelle 5.15b

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt
Einführung in die Integralrechnung

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer

Einführung in die Integralrechnung

VORKENNTNISSE

Die Schülerinnen und Schüler sollten über folgende Kenntnisse verfügen:

- ***Der Begriff der lokalen Änderungsrate kann bekannt sein, ist aber keine Voraussetzung zur Bearbeitung der obigen Aufgabe.***
- ***Die Schülerinnen und Schüler sollten mit dem digitalen Werkzeug grundlegende algebraische Rechenoperationen ausführen können.***
- ***Die Schülerinnen und Schüler sollten Funktionsgraphen visualisieren können.***
- ***Die Schülerinnen und Schüler sollten mit einer Tabellenkalkulation umgehen können.***

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Hinweise zur Lösung

Die Schülerinnen und Schüler arbeiten im Rahmen dieser Aufgabe nicht mit einer vorgegebenen Datei, sondern sie nutzen ihr digitales Werkzeug zielgerichtet als Hilfsmittel etwa zur Bestimmung der Größe der herunter geladenen Dateien oder als Funktionsplotter zur Visualisierung funktionaler Zusammenhänge.

Die Aufgabensequenz stellt den Weg von der einfachen Multiplikation über die Bildung von Produktsummen und die Integralrechnung bis zu einer Modellierung des Übertragungsvorganges aus Messwerten dar. Sie ist in erster Linie zur Festigung des Integralbegriffs gedacht, kann jedoch auch als Einstieg in die Integralrechnung verwendet werden.

Die Aufgaben sind dabei so angelegt, dass sie hinsichtlich ihres Komplexitätsniveaus steigen. Vorausgesetzt werden in diesem Zusammenhang allenfalls grundlegende algebraische Kenntnisse sowie entsprechende Bedienfertigkeiten im Umgang mit dem digitalen Werkzeug.

Wesentliche Erkenntnisse bei der Lösung der Aufgabe:

- Bei einer konstanten Übertragungsrate wächst die Größe der Datei linear in Abhängigkeit von der Zeit.
- Die Grundvorstellungen der Kumulation und des Gesamteffektes werden hier direkt im Einstieg der Aufgabe erfahren, indem mittels der Übertragungsrate und der Kenntnis über die Dauer des Übertragungsvorgangs der Gesamteffekt (= Größe der heruntergeladenen Datei) bestimmt wird (= Kumulation aus den Änderungsraten).
- Sind die Übertragungsraten für gewisse Zeitintervalle stückweise konstant, so lassen sich die Größen der heruntergeladenen Dateien mittels der jeweiligen Änderungsraten in elementarer Weise bestimmen. Die Schülerinnen und Schüler können mit ihrem digitalen Werkzeug (konstante) Funktionen etwa stückweise definieren und somit unterschiedliche Dateigrößen über verschiedene Downloadzeiten bestimmen.

- Auch Funktionsterme können zur Modellierung der Übertragungsrate genutzt werden. Die Schülerinnen und Schüler arbeiten hier mit einer ganzrationalen Funktion dritten Grades, um auf diese Weise eine Funktion ohne Sprungstellen zu nutzen, um die Größe der Datei zu bestimmen. Mit Reflexionsaufträgen können hier grundlegende Ideen der Integralrechnung auf einem präformalen Niveau angebahnt werden.

- Schließlich eignet sich die Aufgabe Download einer großen Datei zur Anwendung des Integralbegriffs. Mittels Tabellenkalkulation können die Schülerinnen und Schüler hier den Funktionsterm der Änderungsratenfunktion zu ermitteln, etwa durch eine geeignete Regression. Auf dieser Grundlage ist sowohl eine grafische als auch eine algebraisch-numerische Variante zur Bestimmung der Gesamtgröße der Datei denkbar.

Die Aufgabe Download einer großen Datei eignet sich als Teilaufgabe in dieser Reihe zur Anwendung der erlernten Begriffe. Ausgehend von den in der Tabelle angegebenen Werten lässt sich zunächst etwa mittels einer Regression die Berandungsfunktion (hier: die Übertragungsratenfunktion) ermitteln.

Die Aufgabe eignet sich dann im Unterricht einerseits, um den Flächeninhaltsaspekt des Integrals zu thematisieren, bei dem – für dieses Beispiel – die Fläche unter dem Graphen der Berandungsfunktion in dem entsprechenden Intervall mit der Größe der Datei identifiziert werden kann. Andererseits ist es hier möglich, den Stammfunktionsaspekt zu thematisieren, indem nämlich ausgehend von der durch Regression ermittelten Übertragungsratenfunktion die entsprechende Stammfunktion mit Hilfe eines CAS ermittelt wird. Mit der Stammfunktion lassen sich die entsprechenden Dateigrößen durch Einsetzen direkt bestimmen.

Die folgenden kommentierten Screenshots können Einblicke in einen möglichen Bearbeitungs- und Lösungsprozess zur Teilaufgabe Download bei schwankender Übertragungsrate geben.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Hinweise zur Lösung

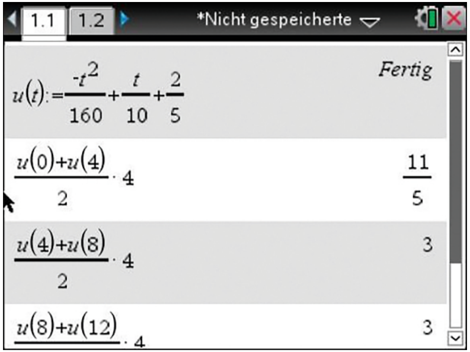


Abbildung 5.15b

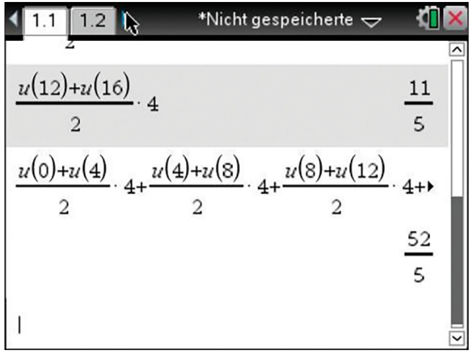


Abbildung 5.15c

Um die Tabelle auszufüllen, reicht ein gewöhnlicher Taschenrechner. Da viele Funktionswerte zu berechnen sind, ist es deutlich komfortabler, wenn man eine Funktion definieren kann.

Die berechneten Datenmengen für die einzelnen Teilintervalle können mit copy and paste zu einer Summe zusammengefasst werden.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

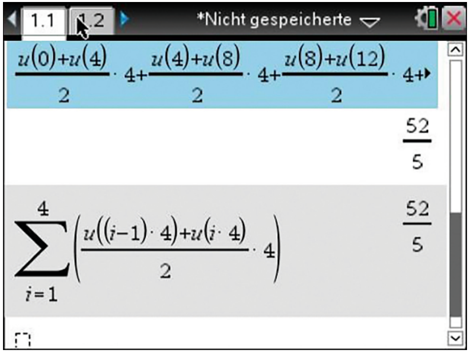


Abbildung 5.15d

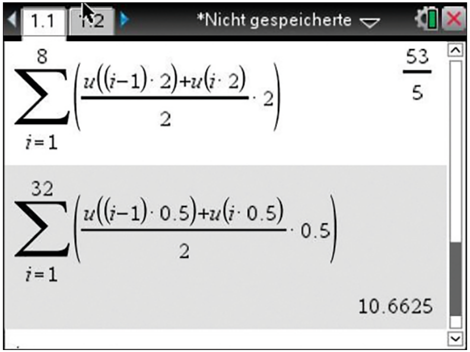


Abbildung 5.15e

Insbesondere bei einer größeren Anzahl von Teilintervallen bietet sich die Einführung der Summenschreibweise an.

Es ist kein besonderer Aufwand mehr, wenn nun die Anzahl der Teilintervalle erhöht wird.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Hinweise zur Lösung

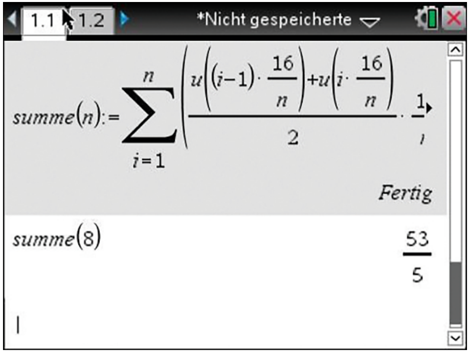


Abbildung 5.15f

Noch komfortabler wird es, wenn man die Summe allgemein für *n* Teilintervalle einer Funktion zuordnet.

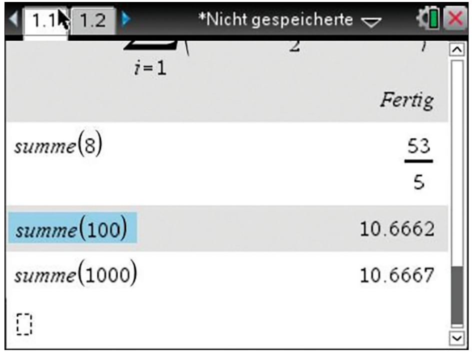


Abbildung 5.15g

Für die Schülerinnen und Schüler ist es eine vertrauensbildende Maßnahme, wenn sie sehen, dass die so gebildeten Funktionswerte mit den zuvor berechneten Summen übereinstimmen.

Bis zu dieser Stelle kann ein GTR verwendet werden.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

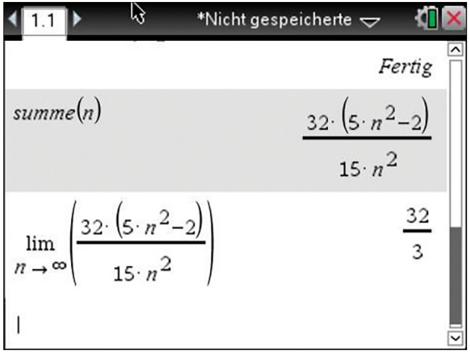


Abbildung 5.15h

Soll der allgemeine Term für die Summe vereinfacht werden, ist das nur noch mit einem CAS möglich.

Nach der Vereinfachung kann nun leicht der Grenzwert gebildet werden. Das sollte ohne Technologie zu schaffen sein.

Im Notfall kann auch die Grenzwertfunktion des CAS-Rechners verwendet werden.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer
Einführung in die Integralrechnung

Hinweise zur Lösung

Zur Aufgabe Download einer großen Datei sind nachfolgend Hinweise für eine mögliche Lösung angegeben.

Variante 1: Die angegebenen Werte werden zunächst in eine Tabellenkalkulation übertragen. Auf dieser Grundlage lassen sich die entsprechenden durchschnittlichen Teilgrößen bestimmen. Durch Kumulation der so ermittelten Teilgrößen lässt sich abschließend die Gesamtgröße der Datei ermitteln.

Aufgrund der diskreten Erfassung der Übertragungsrate in Abständen von je 20 Sekunden bietet sich im Unterricht die Möglichkeit, über unterschiedliche Varianten der Änderung der Änderungsrate zu diskutieren. So ist es ja durchaus eine realistische Variante, dass die Änderungsrate sich sprunghaft ändert und sie somit, wie in diesem Beispiel, durch entsprechende Treppenfunktionen modelliert werden kann.

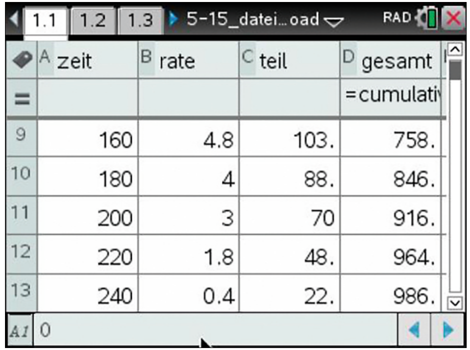


Abbildung 5.15i

Ein zweiter Zugang wird in Variante 2 thematisiert.

Variante 2: Auch hier werden zunächst die angegebenen Werte in eine Tabellenkalkulation übertragen, um dann eine passende Regressionsfunktion zu ermitteln.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Bestimmung einer abschnittsweise definierten Funktion

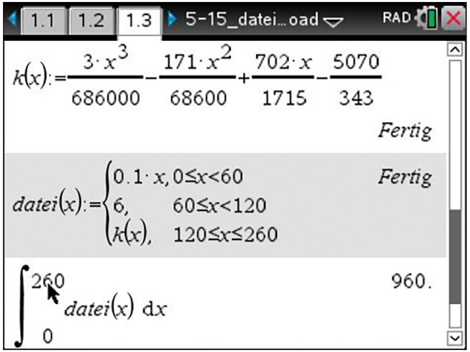


Abbildung 5.15j

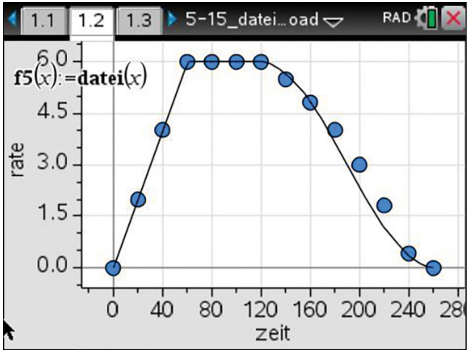


Abbildung 5.15k

Auch eine grafische Lösung ist möglich:

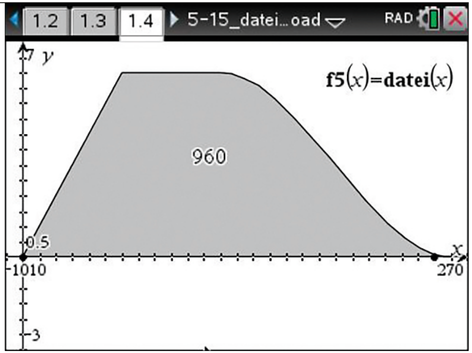


Abbildung 5.15l

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Hinweise zur Lösung

Mögliche Alternativen zur Aufgabenstellung:

Im Unterricht lässt sich in diesem Zusammenhang die hier vorgegebene – eher angeleitete – Variante nutzen, um die jeweiligen Teilgrößen (der Datei) über die Teilintervalle zu bestimmen und sukzessive eine feinere Unterteilung zu wählen, um so die Genauigkeit der Rekonstruierten Größe zu verbessern. Abhängig vom Kurs können diese Entdeckungen auch selbständig im Rahmen einer offenen – von der obigen Version leicht modifizierten – Variante der Aufgabenstellung vorgenommen werden.

MEHRWERT

Die Schülerinnen und Schüler erfahren in einem realitätsnahen Kontext zentrale Grundvorstellungen der Integralrechnung, ohne dabei vorschnell den Kalkül zu nutzen. In dieser Aufgabe steht zunächst nur die Rekonstruktion von Änderungsraten im Mittelpunkt, um auf diese Weise die Größe der Datei (Gesamteffekt) zu ermitteln. Die Schülerinnen und Schüler nutzen das digitale Werkzeug als algebraisches Hilfsmittel sowie als Möglichkeit der Visualisierung der funktionalen Zusammenhänge.

Im Mittelpunkt der Reflexionsaufträge steht die Frage nach der möglichst genauen Rekonstruktion der Größe der Datei aus dem gegebenen funktionalen Zusammenhang. Hier ist eine zunehmend feiner werdende Unterteilung des betrachteten Intervalls eine naheliegende Idee, die von den Schülerinnen und Schüler auch genutzt wird. Insbesondere lassen sich hier – auf propädeutischem Niveau – unterschiedliche Ideen von Ober- und Untersummen sowie Rechts- und Linkssummen thematisieren, die jeweils zentrale Aspekte des Integrals vorbereiten. Im abschließenden Schritt (Teilaufgabe Download einer großen Datei) können die erlernten Begriffe angewendet und vertieft werden.

In einem nächsten Reflexionsschritt, der nicht mehr expliziter Teil der obigen Aufgabe ist, lässt sich eine zunehmende Abstrahierung vom Kontext vollziehen, indem die Rekonstruktionsidee auch mittels negativer Änderungsraten diskutiert wird.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer
Einführung in die Integralrechnung

WERKZEUGKOMPETENZEN

Bedienkompetenz:

- Grundlegende algebraische Operationen, etwa...
  - unterschiedliche Funktionen definieren, ggf. auch stückweise definierte Funktionen
  - Produkte bilden
  - Umgang mit dem Summenzeichen, falls die Idee beliebiger Verfeinerungen des gegebenen Intervalls thematisiert wird
- Visualisierung von Funktionstermen
- Durchführen einer Regression
- Bestimmung der Fläche unter dem Graphen einer Funktion
- Umgang mit Tabellenkalkulation

Dokumentationskompetenz:

Die Schülerinnen und Schüler notieren auf der inhaltlichen Ebene,

- wie sich die Rekonstruktion der Gesamtgröße einer heruntergeladenen Datei aus der Übertragungsrate und der Dauer des Downloads ergibt,
- inwiefern die Größe einer Datei aus einer von der Zeit abhängigen Übertragungsrate rekonstruiert werden kann, die mittels eines Funktionsterms gegeben ist,
- wie die Genauigkeit der Rekonstruktion über die zunehmende Verfeinerung der Rekonstruktion über das betrachtete Zeitintervall genauer wird.
- inwiefern die Gesamtgröße der Datei mithilfe der Fläche unter dem Graphen (Flächeninhaltsaspekt des Integrals) bzw. mithilfe der ermittelten Stammfunktion (Stammfunktionsaspekt) bestimmt werden kann.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

www.mnu.de/weko/5-16_freifallturm.pdf

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt
Freifallturm

5.16 Freifallturm

Jahrgangsstufe 11 – 12

Integrieren heißt nicht nur Flächenberechnung sondern eben auch Rekonstruieren von Beständen aus Änderungsraten.

Haben die Schülerinnen und Schüler diese Grundidee verinnerlicht, so können auch Bestände aus verschiedenen Lebensbereichen durch exakte bzw. näherungsweise Berechnungen ermittelt werden. Die Möglichkeiten, die Tabellenkalkulationen bieten, werden hier genutzt.

Freifalltürme sind Attraktionen in einigen Freizeitparks. Der Freifallturm „The High Fall" im Movie Park Germany hat eine Gesamthöhe von 61 m. Die Passagiere erreichen im freien Fall Geschwindigkeiten von 90 km/h. An der Außenseite des Turms wird eine Gondel mit Passagieren durch einen Aufzug hochgezogen. Das dauert 45 Sekunden und die Geschwindigkeit beträgt gemütliche1,3 m/s. Oben bleibt die Gondel noch 10 Sekunden stehen, damit die Passagiere die Aussicht genießen können. Danach wird die Gondel ausgeklinkt und fällt – von Schienen geführt – 2,5 Sekunden lang frei nach unten, bevor sie wieder durch ein magnetisches Bremssystem gestoppt wird.

(nach Ulla Schmidt, 2015)

Abbildung 5.16a (Movie Park Germany)

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Aufgabe: Freifallturm

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt
Freifallturm

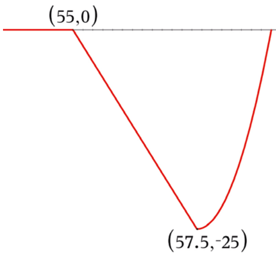


Abbildung 5.16b

A zeit	B geschw...
57.5	-25.
57.6	-24.8889
57.7	-24.5556
57.8	-24.
57.9	-23.2222
58.	-22.2222
58.1	-21.
58.2	-19.5556
58.3	-17.8889
58.4	-16.
58.5	-13.8889
58.6	-11.5556
58.7	-9.
58.8	-6.22222
58.9	-3.22222
59.	0.

Abbildung 5.16c

Während des freien Falls (von Zeitpunkt $t = 55$ s bis $t = 57.5$ s) und während des anschließenden Bremsvorganges wurde mit einem Messgerät jeweils die Geschwindigkeit zum jeweiligen Zeitpunkt gemessen.

Arbeitsauftrag:

a) Nutze das Diagramm und die abgebildete Tabelle, um zu bestimmen, wie lang die Strecke ist, welche die Passagiere frei fallen und berechne anschließend den Bremsweg bis zum Stillstand der Gondel.

b) Erkläre Dein Vorgehen.

c) Finde unterschiedliche Lösungswege für den Teil des Bremsvorganges.

VORLIEGENDE DATEIEN

5-16_freifallturm.ggb
www.geogebra.org/m/R8fZKnn4

5-16_freifallturm.tns
www.mnu.de/weko/5-16_freifallturm.tns

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer
Freifallturm

VORKENNTNISSE

Die Schülerinnen und Schüler sollten über folgende Kenntnisse verfügen:

- ***Integralbegriff***
- ***Rekonstruktion einer Größe aus der Änderungsrate***
- ***Physikalischer Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Weg***
- ***Umgang mit der Tabellenkalkulation***

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Hinweise zur Lösung

Wesentliche Erkenntnisse bei der Lösung der Aufgabe sind:

- Da der freie Fall eine gleichmäßig verzögerte Bewegung darstellt, kann der zurückgelegte Weg entweder direkt über die bekannte Formel $s = \frac{g}{2} t^2$ bzw. auch über die Flächenermittlung im Dreieck bestimmt werden.
- Auch ohne Kenntnis eines Funktionsterms lässt sich der zurückgelegte Weg näherungsweise über die Rekonstruktion aus der Änderungsrate ermitteln.
- der zurückgelegte Bremsweg kann näherungsweise als Summe von Teilwegen berechnen werden, die jeweils innerhalb von 0,1 s zurückgelegt werden.

$\frac{9.81}{2}\cdot(2.5)^2$ 30.6563

$\frac{10}{2}\cdot(2.5)^2$ 31.25

$\frac{2.5\cdot 25}{2}$ 31.25

A zeit	B geschw	C teilweg	D wegsumme
			=cumulativesum(teilweg)
57.5	-25	_	_
57.6	-24.9	-2.495	-2.495
57.7	-24.6	-2.475	-4.97
57.8	-24	-2.43	-7.4
57.9	-23.2	-2.36	-9.76
58.	-22.2	-2.27	-12.03
58.1	-21.1	-2.165	-14.195
58.2	-19.6	-2.035	-16.23
58.3	-17.9	-1.875	-18.105
58.4	-16	-1.695	-19.8
58.5	-13.9	-1.495	-21.295
58.6	-11.6	-1.275	-22.57
58.7	-9	-1.03	-23.6
58.8	-6.2	-0.76	-24.36
58.9	-3.2	-0.47	-24.83
59.	0	-0.16	-24.99

Abbildung 5.16d1 / 5.16d2

Mögliche Alternativen zur Aufgabenstellung:

Denkbar wäre (wie in der Originalaufgabe) für den Teil des Bremsvorganges einen Funktionsterm vorzugeben und die Ergebnisse ohne und mit Funktionsterm zu vergleichen bzw. die Schüler einen Funktionsterm bestimmen zu lassen.

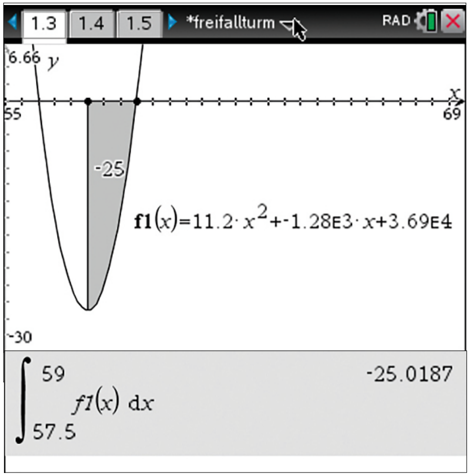


Abbildung 5.16e / 5.16f

MEHRWERT

Das digitale Werkzeug erweitert die Problemlösekompetenz durch

- Nutzung der Tabellenkalkulation zur Berechnung der Teilsummen
- grafische Kontrolle

Das digitale Werkzeug erweitert die Kommunikationskompetenz durch Erläuterung mathematischer Sachverhalte in eigenen Worten (Erklärungen zum physikalischen Zusammenhang).

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer
Freifallturm

Hinweise zur Lösung

WERKZEUGKOMPETENZEN

Bedienkompetenz:

- Grundkenntnisse im Umgang mit einer Tabellenkalkulation.
- Kenntnis im Umgang mit verschiedenen Repräsentationsformen (Tabelle, Grafik)

Reflexionskompetenz:

In der vorliegenden Aufgabe werden zunächst zwei Zugänge genutzt, um den Integralbegriff zu festigen, nämlich ein numerisch-tabellarischer und ein grafischer. Die Schülerinnen und Schüler reflektieren den Zusammenhang dieser beiden Darstellungen hinsichtlich der Rolle des Integralbegriffs, mit dessen Hilfe sich Aussagen über den freien Fall machen lassen. Die Lernenden können so die gegebenen Daten nutzen, um den zurückgelegten Weg über die Rekonstruktion der Änderungsraten zu bestimmen.

Dokumentationskompetenz:

Gerade für die Festigung der Begriffe, die mit dem Integralbegriff selbst verbunden sind, sollten die Lernenden die mathematischen Argumentationsschritte genau beschreiben. So können Schülerinnen und Schüler den Zusammenhang von Änderungsrate und der Rekonstruktion im Zusammenhang des freien Falls eigenständig formulieren und die entsprechenden Werte bestimmen. Wichtig ist, dass im Unterricht zwischen der Beschreibung von Bedienschritten und der mathematischen Argumentation getrennt wird. Dies kann mit den Lernenden an beispielhaften gelungenen – aber unterschiedlichen – Schülerdokumentationen im Unterricht auch thematisiert werden.

LITERATUR

Ulla Schmidt: Von der Änderungsrate zum Bestand, S. 230 ff. In: W. Blum / S. Vogel / C. Drüke-Noe / A. Roppelt (Hrsg.). (2015) Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II. Bildungshaus Schulbuchverlage Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH, Braunschweig.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Werkzeugkompetenz im MNU-Themenspezial

Format A4, 122 Seiten, mehrfarbig
Bestell-Nr.: 1621,
Preis: 15,80 EUR, inkl. Versandkosten
MNU-Mitglieder erhalten 1 Buch ohne Berechnung.
Ihre Bestellung richten Sie bitte an:
www.mnu.de/tablet3

Format A4, 125 Seiten, mehrfarbig
Bestell-Nr.: 1619,
Preis: 15,80 EUR, inkl. Versandkosten
MNU-Mitglieder erhalten 1 Buch ohne Berechnung.
Ihre Bestellung richten Sie bitte an:
www.mnu.de/tablet2

www.mnu.de/weko/5-17_rotationskoerper.pdf

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt

Rotationskörper

Es ist nicht einfach, im Mathematikunterricht deutlich zu machen, dass Mathematik helfen kann, die „normalen" Dinge, die nicht-mathematische Wirklichkeit um uns herum besser zu verstehen.

Einen motivierenden Ansatz hierfür bietet die Untersuchung vom Volumen von Gläsern unterschiedlicher Form. Dabei werden z. B. Biergläser als Rotationskörper modelliert und dann das Volumen dieser Rotationskörper mit den Mitteln der Integralrechnung bestimmt.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

5.17 Rotationskörper

Jahrgangsstufe 11 – 12

Wenn den Lernenden bekannt ist, wie man das Volumen von Rotationskörpern bestimmt, dann erlauben digitale Werkzeuge eine Untersuchung von sehr vielfältigen Problemstellungen aus dem Alltag.

In der Jahrgangsstufe 12 mehren sich bei den Lernenden die Besuche in Discos und Kneipen, so dass die Frage, ob die Eichmarken an den Getränkegläsern korrekt sind, unmittelbar praktisch relevant ist.

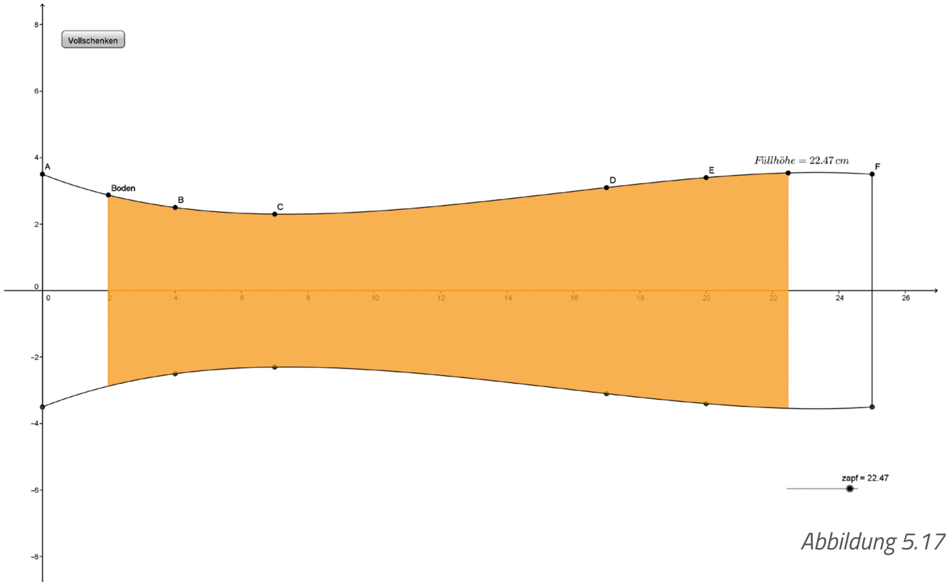


Abbildung 5.17

Aufgabe: Das Weizenbierglas

Für das nebenstehende Bierglas soll ermittelt werden, auf welcher Höhe die Eichmarke (die im Bild nicht zu erkennen ist) angebracht werden muss. Bei einem derartigen Weizenbierglas zeigt die Eichmarke ein Volumen von einem halben Liter an.

1. Überlege dir zunächst **allein** eine Strategie, wie man die Randkurve des Bierglases durch eine Funktionsvorschrift beschreiben könnte.

   Überlegt dann **in eurer Gruppe**, wie viele Messungen ihr durchführen wollt und wo ihr messen wollt. Diskutiert auch die Vor- und Nachteile von sehr vielen oder sehr wenigen Messungen.

2. Ermittelt eine Funktionsgleichung, durch die das Bierglas gut modelliert wird. Beschreibe hierzu dein Vorgehen mit dem digitalen Werkzeug. Verwende hierzu die Datei entweder „bierglas1" oder auch nur das Bild „5-17_bierglas.jpg" und ein digitales Werkzeug deiner Wahl.

3. In der Datei „bierglas2" (Abbildung 5.17a) findet man zunächst das Bild eines liegenden Bierglases. Fünf bewegliche Punkte A, B, C, D und E sollen auf dem Rand des Glases liegen.

Vergleicht den Lösungsweg in der Datei „bierglas2" mit eurem Vorgehen. Beantwortet folgende Fragen:

a) Wie genau ist die Eichmarke?

b) In welcher Höhe müsste die Eichmarke sein, damit wirklich genau 500 cm³ in das Bierglas passen?

c) Wie hoch ist das Glas gefüllt, nachdem man es zur Hälfte geleert hat?

d) Wie viel passt maximal in so ein Weizenbierglas?

e) Formuliert eine Beschreibung, wie sich das dreidimensionale Volumen eines Gefäßes, von dem nur das (zweidimensionale) Bild vorliegt, mit Hilfe des digitalen Werkzeugs möglichst einfach bestimmen lässt.

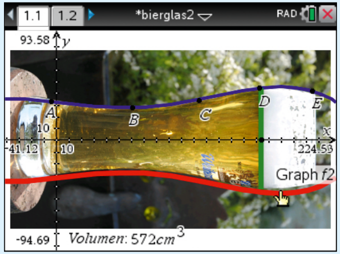


Abbildung 5.17a

VORLIEGENDE DATEIEN

JPG
5-17_bierglas.jpg
www.mnu.de/weko/5-17_bierglas.jpg

GeoGebra
5-17_bierglas1.ggb
www.geogebra.org/m/sHEjvCY9

TI-nspire
5-17_bierglas1.tns
www.mnu.de/weko/5-17_bierglas1.tns

GeoGebra
5-17_bierglas2.ggb
www.geogebra.org/m/CHjvN89z

TI-nspire
5-17_bierglas2.tns
www.mnu.de/weko/5-17_bierglas2.tns

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer

Rotationskörper

VORKENNTNISSE

Die Schülerinnen und Schüler sollten über folgende Kenntnisse verfügen:

- ***Aufstellen von Funktionsgleichungen, wenn bestimmte Punkte (Merkmale) des Graphen bekannt sind (= „Steckbriefaufgaben“).***
- ***Berechnen des Volumens von Körpern, die bei der Rotation von Funktionsgraphen um die x-Achse entstehen.***

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:

Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Hinweise zur Lösung

Wesentliche Erkenntnisse bei der Lösung der Aufgabe sind:

- Verschiedene Lösungsansätze können zu ähnlich guten Lösungen führen.
- Modellieren und Validieren stellen einen Kreislauf dar.
- Berechnung von Volumina von Rotationskörpern, nachdem die Randkurve durch Rekonstruktion unter Verwendung von 4-5 Messwerten am Objekt (Steckbriefaufgabe) modelliert wurde.
- Berechnung von einem Integral mit vorgegebenem Wert und variabler oberer Grenze.

Mögliche Alternativen zur Aufgabenstellung:

Fassaufgaben, Bierschaumzerfall.

MEHRWERT

Das digitale Werkzeug erweitert die Modellierungskompetenz durch

- einfache Möglichkeiten zur Variation der Randpunkte,
- Vergleich verschiedener Modellierungsansätze,
- das digitale Werkzeug erweitert die Modellierungskompetenz durch schnelle Visualisierungsmöglichkeiten.

WERKZEUGKOMPETENZEN

Bedienkompetenz:

Die Schülerinnen und Schüler müssen die erforderlichen Rechenbefehle zum Lösen von linearen Gleichungssystemen anwenden können, ggf. kann auch das Regressionstool des Werkzeuges genutzt werden.

Wird zur Lösung die vorgegebene Datei genutzt, muss der Lernende in der Lage sein, je nach verwendetem Werkzeug Verknüpfungen zwischen den einzelnen Repräsentationsebenen (Algebra- und Geometriemodus) herstellen zu können.

Dokumentationskompetenz:

Insbesondere bei der Nutzung des Regressionstools ist es wichtig, auf eine genaue Dokumentation zu achten. Unterscheiden sollte man dabei im Unterricht zwischen der Beschreibung der Bedienung (etwa: Wie gelange ich zur Regressionsfunktion?) und der Beschreibung der mathematischen Argumente (etwa: Was sagt der Regressionskoeffizient aus?). Im Schülerheft lässt sich eine solche Trennung der beiden Ebenen auch vornehmen.

Auswahlkompetenz:

Je nach Vorkenntnissen könnte die Lösungsfindung auch mit dem Regressionswerkzeug des CAS erfolgen.

Reflexionskompetenz:

Hier sollten die Schülerinnen und Schüler insbesondere die Potentiale mathematischer Modellbildungssituationen reflektieren, die Möglichkeiten und Grenzen der Unterstützung durch digitale Werkzeuge sowie – mit Blick auf die zugrundeliegenden mathematischen Konzepte – die entsprechenden Begriffe im Umfeld der Durchführung einer Regression.

Abbildung 5.17b: Woher weiß der Wirt, dass in dieses Glas 0,5 l Bier passen?

LITERATUR

Weller, H. (1996): Das Weizenbierglas. In: mathematik lehren 77. Friedrich Verlag: Seelze, S. 67. Braunschweig.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

www.mnu.de/weko/5-18_uebergangsmatrizen-3.pdf

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt

Übergangsmatrizen

Übergangsmatrizen sind ein überschaubarer Themenbereich, der schnell zu Abituraufgaben führt, und in den Bildungsstandards der KMK unter der Leitidee Algorithmus und Zahl thematisiert wird: „Diese Leitidee verallgemeinert zum einen den Zahlbegriff der Sekundarstufe I zu Tupeln und Matrizen einschließlich zugehöriger Operationen. […] Weiter umfasst die Leitidee die Kenntnis, das Verstehen und das Anwenden mathematischer Verfahren, die prinzipiell automatisierbar und damit einer Rechnernutzung zugänglich sind.“

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:

Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

5.18 Übergangsmatrizen

Jahrgangsstufe 12 – 13

In vielen Fällen beschränkt man sich bei Übergangsmatrizen auf stochastische Matrizen, deren Spaltensumme immer 1 = 100% ist. Hier wird die Aufgabe „Seehunde“ aus den Bildungsstandards bearbeitet.

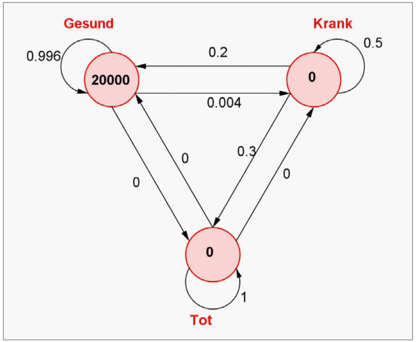


Abbildung 5.18

Das dynamische Arbeitsblatt hat einen Großteil der bei Aufgaben zu Übergangsmatrizen erforderlichen Rechnungen gekapselt. Diese können dann per Schieberegler abgerufen werden.

Damit gibt es eine Schwerpunktverlagerung weg von der langwierigen und fehleranfälligen Durchführung von Matrizenmultiplikationen und Matrizeninversionen hin zur mathematischen Interpretation. Dies hat natürlich Auswirkungen auf die Art und Sinnhaftigkeit von Aufgabenstellungen.

Aufgabe: Übergangsmatrizen

In einer Seehundpopulation von 20000 Tieren breitet sich eine ansteckende Krankheit aus, die zum Tod vieler Tiere führt.

Eine Meeresbiologin, die kurz nach Ausbruch der Krankheit anreist, stellt bei ihrer Ankunft fest, dass bereits 60 Tiere an dieser Krankheit gestorben sind.

Die Meeresbiologin vermutet einen bestimmten Krankheitserreger. Für diesen existiert aufgrund früherer Erfahrungen bereits ein Modell für den Verlauf der Krankheit. Das Modell beschreibt die Übergänge der möglichen „Zustände" von Tieren (Tier gesund (G), Tier krank (K) oder Tier tot (T)) von einem Tag auf den anderen jeweils als Anteile. Die konkreten Werte für diese Anteile sind in folgender Tabelle dargestellt:

	von / nach	Tier gesund (G)	Tier krank (K)	Tier tot (T)
	Tier gesund (G)	0,996	0,2	0
x	**Tier krank (K)**	0,004	0,5	0
	Tier tot (T)	0	0,3	1

Tabelle 5.18a

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt
Übergangsmatrizen

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt
Übergangsmatrizen

Aufgabe: Übergangsmatrizen

Im Modell werden innerhalb der beobachteten Seehundpopulation weder Todesfälle, die nicht auf die Krankheit zurückzuführen sind, noch Geburten berücksichtigt.

a) Stellen Sie die in der Tabelle angegebenen Informationen in einem Übergangsgraphen dar und erläutern Sie die Bedeutung der Zahlen in der mit x gekennzeichneten Zeile der Tabelle 5.18a im Sachzusammenhang.

b) Erläutern Sie unter Bezug auf mindestens zwei der Zustände, woran man bereits an der Tabelle oder am Übergangsgraphen erkennen kann, dass die Anzahl der Tiere der Seehundpopulation schon im Zeitraum weniger Monate deutlich geringer wird.

c) Im Rahmen dieses Modells kann die Meeresbiologin aus der Anzahl der 60 toten Tiere zu Beginn ihrer Beobachtung auf den Zeitpunkt des Ausbruchs der Krankheit schließen.
Weisen Sie durch eine Rechnung nach, dass sie demnach ihre erste Beobachtung am 3. Tag nach Ausbruch der Krankheit durchgeführt hat.

d) Bis zu einem bestimmten Tag sind insgesamt 380 Tiere an dieser Krankheit gestorben. Am darauffolgenden Tag findet die Biologin noch 47 weitere tote Tiere.

- Zeigen Sie, dass diese Beobachtung mit dem vorhandenen Modell vereinbar ist.
- Geben Sie an, wie die Anzahl gesunder Tiere zwischen diesen beiden Tagen zurückgegangen ist.

e) Ein Kollege der Meeresbiologin vermutet einen anderen Krankheitserreger, der wesentlich ansteckender ist, ansonsten aber den gleichen Krankheitsverlauf bei den erkrankten Tieren aufweist. Das gegebene Modell soll zur Simulation des Krankheitsverlaufs entsprechend verändert werden.

- Geben Sie ein Beispiel für eine Übergangsmatrix an, die dieser veränderten Bedingung entspricht, und begründen Sie Ihr Vorgehen.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Aufgabe: Übergangsmatrizen

f) Weitere Untersuchungen haben gezeigt, dass die Vermutung der Meeresbiologin bezüglich des Krankheitserregers doch stimmte. Allerdings sind, anders als im ursprünglichen Modell, wieder genesene Tiere dauerhaft immun gegen diesen Krankheitserreger. Die sonstigen Daten des Krankheitsverlaufs bleiben unverändert.

- Das Modell wird entsprechend um einen Zustand „Tier immun" (*I*) erweitert. Der Zustand „Tier gesund" (*G*) soll dann die gesunden, aber noch nicht immunen Tiere beschreiben.
- Gehen Sie davon aus, dass beim Ausbruch der Krankheit noch kein Tier immun ist.
- Geben Sie den Übergangsgraphen und die Übergangsmatrix für das veränderte Modell an.
- Erläutern Sie mithilfe dieses Übergangsgraphen, warum ca. 40 % der Population die Epidemie überleben wird.

Optionale Zusatzfrage für Klassen mit graphikfähigem Taschenrechner. Wegen der 4x4-Matrix reicht ein WTR nicht mehr aus. Die Punkteverteilung muss dann entsprechend angepasst werden:

- *Berechnen Sie den Zustandsvektor am dritten Tag. Geben Sie an, wie viele Tiere bis dahin immun geworden sind.*

Quelle: KMK (2012): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. S. 36 – 37

a) Bearbeiten Sie die Aufgabe Übergangsmatrizen a) – e) mit Hilfe des dynamischen Arbeitsblattes 5-18_uebergangsmatrizen-3.ggb.

b) Welche Teile der ursprünglichen Aufgabe reduzieren sich beim vorliegenden Werkzeug auf Mausklicks, welche Teile ändern sich nicht?

c) Bearbeiten Sie die Aufgabe Übergangsmatrizen f) mit Hilfe des dynamischen Arbeitsblattes 5-18_uebergangsmatrizen-4.ggb.

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt
Übergangsmatrizen

VORLIEGENDE DATEIEN

5-18_uebergangsmatrizen-3.ggb
www.geogebra.org/m/gRxErW84

5-18_uebergangsmatrizen-4.ggb
www.geogebra.org/m/zu9k37v9

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer

Übergangsmatrizen

VORKENNTNISSE

Die Schülerinnen und Schüler sollten über folgende mathematische Kenntnisse verfügen:

- ***stochastische Übergangsmatrizen,***
- ***Matrizenmultiplikation/ Matrizenpotenzen,***
- ***Übergangsdiagramm/ -graph,***
- ***Zustandsvektor.***

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Hinweise zur Lösung

Hier wird anstelle eines WTR/ GTR/ CAS-TR mit dem digitalen Arbeitsblatt 5-18_uebergangsmatrizen-3.ggb als Lern- und Arbeitsumgebung gearbeitet. Deswegen gibt es bei den einzelnen Teilaufgaben auch Anmerkungen zu Aufgabenstellung und Werkzeugeinsatz.

Wesentliche Erkenntnisse bei der Lösung der Aufgabe sind:

Zu a)
Tabelle/ Matrix:

	G	***K***	***T***
G	0,996	0,2	0
K	0,004	0,5	0
T	0	0,3	1

Tabelle 5.18a

Der Übergangsgraph wird im Arbeitsblatt aus den Eintragungen in die Tabelle automatisch erzeugt.

Anmerkung: Diese Aufgabe (in der Papierversion in den KMK Bildungsstandards) reduziert sich beim Einsatz des digitalen Arbeitsblattes auf das Eintragen der Werte in die Tabelle.

Zu b)
Von den kranken Tieren sterben jeden Tag 30%. „Tot" ist ein absorbierender Zustand, es gibt keinen Übergang von „Tot" zurück zu „Gesund" oder „Krank". Deswegen muss die Population im Rahmen dieses Modelles aussterben.

Anmerkung: Diese Überlegung erfolgt werkzeugfrei.

Zu c)
Mit dem Schieberegler $n = 3$ kommt man bei der Iteration (gerundet) nach 3 Tagen auf 60 tote Tiere.

Anmerkung: Diese Aufgabe reduziert beim Einsatz des digitalen Arbeitsblattes die mehrfache Matrix-Vektor-Multiplikation auf das Ziehen am Schieberegler.

Zu d)
Durch Verändern des Wertes am Schieberegler n findet man heraus, dass nach 10 Tagen (gerundet) 380 Tiere gestorben sind. Zum darauffolgenden 11. Tag ändert sich die Zahl der gesunden Tiere von (gerundet) 19464 auf 19417. Also gibt es dann 47 gesunde Tiere weniger.

Anmerkung: Diese Aufgabe ersetzt beim Einsatz des digitalen Arbeitsblattes das Aufstellen und Lösen eines LGS durch das Ziehen am Schieberegler.

Zu e)
Wenn man die Modellannahme z. B. dahingehend ändert, dass 5% der gesunden Tiere krank werden, dann bleiben als Konsequenz nur noch 95% der gesunden Tiere gesund. Analog bei 6% und 94% usw.

Anmerkung: Diese Überlegung erfolgt werkzeugfrei.

Zu f)
Neue Tabelle / Matrix:

	G	***K***	***T***	***I***
G	0,996	0	0	0
K	0,004	0,5	0	0
T	0	0,3	1	0
I	0	0,2	0	1

Tabelle 5.18b

Weil sich der Übergang von K nach T und I wie 0,3 : 0,2 verhält und davon auszugehen ist, dass langfristig alle Tiere einmal krank werden, ist langfristig davon auszugehen, dass 60% der Population sterben und 40 % überleben und immun geworden sind.

Anmerkung: Diese Überlegung erfolgt werkzeugfrei. Mit dem dynamischen Arbeitsblatt könnte man auch die obere Grenze des Schiebereglers Iteration auf 5000 erhöhen, dann „sieht" man den Sachverhalt.

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer
Übergangsmatrizen

Hinweise zur Lösung

MEHRWERT

Hier wird das Anliegen der Bildungsstandards *„das Anwenden mathematischer Verfahren, die prinzipiell automatisierbar und damit einer Rechnernutzung zugänglich sind“* realisiert. Die Schülerinnen und Schüler können einfach und ohne Rechenfehler Übergangsprozesse (mit 3 Zuständen) für kleine und große, sogar negative *n* untersuchen, Grenzprozesse verfolgen und Fixverteilungen angeben.

Dir originale Aufgabe ist für den Einsatz eines wissenschaftlichen Taschenrechners mit erweitertem Funktionsumfang (hier: Multiplikation von 3x3-Matrizen, Lösen linearer Gleichungssysteme von drei Gleichungen mit drei Variablen) konzipiert. Hier wird deutlich, dass der Einsatz mehr oder weniger mächtiger Werkzeuge erhebliche Auswirkungen auf sinnvolle und angemessene Aufgabenstellungen in Unterricht und Prüfungen hat.

Mit dem hier vorgestellten dynamischen Arbeitsblatt als Lern- und Arbeitsumgebung können jetzt über die originale Aufgabenstellung der Bildungsstandard-Aufgabe hinaus Fragestellungen zu zurückliegenden Zuständen gestellt werden, wenn man annimmt, dass die Krankheit nicht gerade erst ausgebrochen sei (inverse Matrix, negative Exponenten) oder zur langfristigen Entwicklung (Verteilung für große *n* / Grenzverteilung, Fixverteilung).

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer
Übergangsmatrizen

WERKZEUGKOMPETENZ

Bedienkompetenz:

- Die Schülerinnen und Schüler müssen die Tabellenansicht von GeoGebra kennen und Werte in Tabellen eintragen können.

- Des weiteren müssen sie mit Schiebereglern und Kontrollkästchen arbeiten können.

Problemlösekompetenz:

- Hier geht es um systematisches Variieren (Verändern der Werte in Matrix und Startvektor sowie Schieberegler) und experimentieren.

Kommunikationskompetenz:

- Es werden mathematische Sachverhalte in eigenen Worten beschrieben.

LITERATUR

Seebach, G. & Elschenbroich, H.-J. (2013): Mit GeoGebra stochastische Prozesse und ihre Übergangsmatrizen erkunden. DZLM-Workshop Mathematik Anders Machen.

KMK (2012): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. S. 36 – 40
www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich,
Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing,
Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

6. Mathematik zu Papier bringen: Dokumentationen im Lernprozess und in (Abitur-)Klausuren

Jeder kennt die Erfahrung, wie schwierig es sein kann, die eigenen Gedanken zu Papier zu bringen. Der Prozess des Niederschreibens erfordert ein hohes Maß an gedanklicher Strukturierungsfähigkeit, noch ehe das erste Wort ausgeschrieben ist. Beim Schreiben sind wir uns der Erfahrung bewusst, dass das gesprochene Wort sehr viel flüchtiger ist als eine Niederschrift: Jedes Wort im Text will wohlüberlegt sein. Insofern ist ein Text nicht ein bloßer Spiegel unserer Gedanken. Im Gegenteil: Wir treffen beim Schreiben eine Vielzahl von Entscheidungen, die die Strukturierung, die Wortwahl und natürlich den Inhalt des Textes beeinflussen. In diesem Sinne ist ein Text eher der Spiegel eines mit vielen – expliziten oder impliziten – Entscheidungen verbundenen Reflexionsprozesses.

Das gilt auch für die Verschriftlichung im Mathematikunterricht, egal ob bei der schriftlichen Dokumentation von Lösungen, von Entdeckungen, von Vermutungen oder von Bearbeitungswegen. Ständig werden Entscheidungen getroffen: Sollten bestimmte Fachbegriffe verwendet werden? Soll mein Sitzpartner das verstehen oder mein Klassenlehrer? Reicht das Ergebnis oder sollte der Bearbeitungsprozess verschriftlicht werden? Jede Entscheidung hat direkte Konsequenzen für die Verschriftlichung. Ein sprachsensibler Mathematikunterricht vermittelt eine Einschätzung darüber, welche Entscheidungen in welcher Situation richtig sind. Das Schreibenlernen selbst wird so als wesentlicher Teil des mathematischen Lernprozesses begriffen.

Im Folgenden werden daher zunächst einige Kriterien diskutiert, die bei schriftlichen Dokumentationen eine Rolle spielen (Abschnitt 6.1). Der Grundgedanke ist dabei, dass wir differenzieren sollten: In einer Lernsituation zu Beginn einer Unterrichtsreihe können schriftliche Dokumentationen nicht im gleichen Maße sprachlich elaboriert sein wie etwa in einer Klausur, in der die Beherrschung gewisser Fachbegriffe vorausgesetzt wird. Während in Abschnitt 6.2 eine solche prozessorientierte Sicht auf Dokumentationen eingenommen wird, werden in Abschnitt 6.3 konkrete Praxishilfen für den Unterricht thematisiert. Ein konkretes Beispiel für eine mögliche Dokumentation in Klausuren wird in den Abschnitten 6.4 und 6.5 thematisiert. Das ist eine ganz alltägliche Erfahrung, die die obigen Gedanken aufgreift: Wer Dokumentationen im Mathematikunterricht als Spiegel eines Reflexionsprozesses versteht, der muss anerkennen, dass gedankliche und sprachliche Prozesse auf das Engste miteinander verknüpft sind und sich nicht unabhängig voneinander entwickeln.

6.1 Dokumentation und Reflexion bei der Arbeit mit digitalen Werkzeugen

Die folgenden Schülerbeispiele entstammen einem Unterricht mit digitalen Werkzeugen. Bei dem ersten Beispiel arbeitet Annabel an der Aufgabe zur Erkundung von Achsensymmetrie in Kl. 5/6. Bei der Arbeit mit einer DGS sind zwei Vierecke zu sehen. Wenn man an den Eckpunkten der Vierecke zieht, bewegen sich die entsprechenden Bildpunkte automatisch mit – und zwar spiegelbildlich zu einer nicht sichtbaren Spiegelachse. Bei dem zweiten Beispiel arbeitet Georg an einer Aufgabe zu funktionalen Zusammenhängen.

Im Rahmen einer Aufgabe zu funktionalen Zusammenhängen diskutiert Georg die Frage, ob der Graph der Funktion f mit $f(x)=3x^2+5x+4$ Schnittpunkte mit dem Graphen ihrer Ableitungsfunktion hat.

$f'(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$ solve$(f'(x)=f(x),x)$ ↝ x-Werte
Ergebnisse in $f(x)$ oder $f'(x)$ einsetzen (müsste das selbe rauskommen)
↝ y-Werte

Abbildung 6.1b: Schülerbeispiel zur Dokumentation von Georg

Die Dokumentationen werfen zugleich die Frage auf, in welcher Weise Schülerinnen und Schüler ihre Bearbeitung von Aufgaben dokumentieren. Annabel (Kl. 6) notiert oben eine erste Vermutung und bringt darin zum Ausdruck, dass die Vierecke miteinander verbunden sind. Sie nimmt zunächst wahr, dass sich durch Ziehen an einem Punkt immer gleichzeitig ein zweiter Punkt mitbewegt. Die Art und Weise der Relation zwischen diesen beiden Punkten und den geometrischen Konfigurationen beschreibt sie hier nicht näher. Annabel greift hier ganz wesentlich auf ihre Umgangssprache zurück (*mit dem anderen verbunden ist*) – gerade zu Beginn eines Lernprozesses ein ganz normales Phänomen.

Beschreibe den Zusammenhang zwischen den beiden Punkten. (Beispiel aus Hagemann 2015)

Ich glaube, dass man die Vierecke gleichzeitig bewegen kann, weil das eine Mit dem anderen Verbunden ist usw.

Abbildung 6.1a: Schülerbeispiel zur Dokumentation von Annabel

Georg dokumentiert sehr genau, wie er mit Hilfe seines CAS die Lösung bestimmt hat: Er definiert dazu zunächst die Funktion f' und verweist dabei auf $\frac{d}{dx}(f(x))$.

Er nutzt dann den solve-Befehl, um die Terme der Ableitungsfunktion f' und f gleichzusetzen, und er erhält so einen x-Wert, der für das weitere Vorgehen genutzt werden kann. Georg nutzt hier explizit die Werkzeugsprache seines CAS, um die Bearbeitungsweise der Aufgabe zu dokumentieren. Im Rahmen des Lernprozesses macht es durchaus Sinn, eine solche Sprache explizit zu nutzen, um im Gespräch mit den Mitschülerinnen und Mitschülern verschiedene Bearbeitungswege direkt vergleichen zu können.

Im Rahmen etwa von zentral gestellten Vergleichsklausuren erwarten wir hingegen von den Schülerinnen und Schülern, dass sie die im Mathematikunterricht genutzte Sprache in einer Weise formalisiert haben, dass die Beurteilung der Lösung durch (Fremd-) Korrekteure nicht von der Beherrschung eines konkreten technischen Gerätes und dessen Syntax abhängt, sondern dass die Dokumentation der Lösung allgemein verständlich ist. Georgs Beispiel macht deutlich, dass es notwendig ist, zwischen Lernprozess und Lernstand bei der Dokumentation von Bearbeitungen von Aufgaben zu unterscheiden (vgl. etwa Schacht 2014a und 2014b).

Eine kompetente Dokumentation und Reflexion des Bearbeitungsprozesses mathematischer Probleme unter besonderer Berücksichtigung der Nutzung von Fach- und Werkzeugsprache erfordert die Formulierung von Gütekriterien, die genauer beschreiben, was unter einer kompetenten Art der Dokumentation zu verstehen ist. Die folgenden Gütekriterien für die Dokumentation und Nutzung von Fach- und Werkzeugsprache schlüsseln sich in zwei Ebenen auf:

- Lernverlaufsorientierte Gütekriterien (dynamisch und kumulativ)

- Lernstandorientierte Gütekriterien (konsolidiert und normiert)

Die lernverlaufsorientierten Gütekriterien berücksichtigen die individuellen Lernwege der Schülerinnen und Schüler. Diese sind heterogen, unterschiedlich schnell, unterschiedlich variantenreich – insgesamt: hochgradig individuell verschieden. Insofern müssen Gütekriterien für die Nutzung von Fach- und Werkzeugsprache ebendiese Entwicklungen – gerade in Lernsituationen – berücksichtigen. Keiner erwartet von einem Schüler zu Beginn einer Unterrichtsreihe zur Differentialrechnung eine effektive und hochstrukturierte Problemlösung. Die Fähigkeit, die mathematischen Denkwege zu dokumentieren, kann nicht losgelöst von den ständig sich entwickelnden individuellen mathematischen Fähigkeiten betrachtet werden. Dies nehmen diese dynamischen und kumulativen Gütekriterien in den Blick. Im Einzelnen sind dies:

- Der Formalisierungsgrad der durch die Schülerinnen und Schüler genutzten Sprache (sowohl hinsichtlich der Fach-, als auch der Werkzeugsprache) sollte im Verlauf eines Lernprozesses zunehmend höher werden.

- Die sprachliche Elaboriertheit und die sprachliche Komplexität sollten sich im Verlauf des Lernprozesses zunehmend steigern.

- Der Reflexionsgrad der Dokumentationen sollte – auch durch das Einnehmen der Metaebene – im Verlauf eines Lernprozesses zunehmen. Dabei ist neben der Reflexion des Bearbeitungsprozesses auch die Reflexion des Einsatzes des digitalen Werkzeuges von entscheidender Bedeutung. Fragen nach dem Mehrwert des digitalen Werkzeuges für die Problembearbeitung können im Unterricht bedeutsame Anlässe bereithalten, mathematische Heuristiken und die Effizienz von mathematischen Problemlösestrategien zu diskutieren.

Diese drei lernverlaufsorientierten Gütekriterien markieren Kriterien für eine sich dynamisch und kumulativ entwickelnde und zunehmend elaborierte und komplexe Nutzung von Fach- und Werkzeugsprache im Mathematikunterricht. Sie zeichnen sich in diesem Zusammenhang insbesondere dadurch aus, dass die individuelle Entwicklung von Schülerinnen und Schülern im Rahmen eines Lernprozesses mitberücksichtigt wird.

So zeigen einige weitere Dokumentationen aus Annabels Lernprozess im nächsten Abschnitt, wie sich mit den zunehmenden mathematischen Kompetenzen auch die sprachlichen Fähigkeiten weiterentwickeln: Das Phänomen der Symmetrie wird in zunehmend reflektierter Weise durchdacht und versprachlicht.

Andererseits gehören neben den oben beschriebenen Lernsituationen die Leistungssituationen zum Alltag des Mathematikunterrichts, ob in Klassenarbeiten, Klausuren oder zentralen Prüfungen. Das hier vorgestellte Konzept nimmt sich zum Ziel, insbesondere auch für solche Situationen (normierte und konsolidierte) lernstandorientierte Gütekriterien zu formulieren. Diese zeichnen sich gegenüber den lernverlaufsorientierten Kriterien dadurch aus, dass sie klare Kriterien formulieren, um Dokumentationsleistungen angemessen beurteilen zu können.

- Die Lösungen sollten in sprachlich und inhaltlich nachvollziehbarer und stringenter Form dokumentiert werden.

- Bei Dokumentationen von Lösungs- und Bearbeitungswegen sollten die Schülerinnen und Schüler beide sprachlichen Ebenen (sowohl Fach- als auch Werkzeugsprache) verwenden.

- Schließlich sollte diese Verwendung von Fach- und Werkzeugsprache vor dem Hintergrund der darstellerischen Trennung der beiden sprachlichen Modi geschehen. Ein Beispiel ist in diesem Zusammenhang die Verwendung einer Ableitungsfunktion f', die – je nach gewählter Syntax – in der Werkzeugsprache mit f1 bezeichnet wird. Für die Verwendung von Fach- und Werkzeugsprache im Unterricht bedeutet das, den Schülerinnen und Schülern gegenüber transparent zu machen, in welchen Situationen Werkzeugsprache im Unterricht bewusst verwendet wird und wann nicht.

Diese drei lernstandorientierten Gütekriterien markieren normierte Kriterien für die Nutzung von Fach- und Werkzeugsprache im Mathematikunterricht. Gegenüber den lernprozessorientierten Gütekriterien zeichnen sie sich dadurch aus, dass sie insbesondere in Prüfungs- und Leistungssituationen manifest werden, in denen von den Schülerinnen und Schülern erwartet wird, dass sie sich mit einem gewissen Lerngegenstand hinreichend intensiv auseinandergesetzt haben und ihre Dokumentationen daher einen hinreichenden Formalisierungsgrad, Reflexionsgrad und Komplexitätsgrad (jeweils dynamisch und kumulativ) erreicht haben.

Georgs Beispiel macht deutlich, inwiefern hier insbesondere die sprachliche Trennung von Fach- und Werkzeugsprache zu einer Lösungsdokumentation hätte führen können, die mehr Tiefenschärfe hinsichtlich der Beschreibung des Lösungsweges gehabt hätte. So hätte er etwa zu Beginn eine kurze Beschreibung des inhaltlichen Vorgehens angeben können.

Die folgende Abbildung beschreibt die beiden Ebenen von Gütekriterien für die Nutzung von Fach- und Werkzeugsprache im Mathematikunterricht.

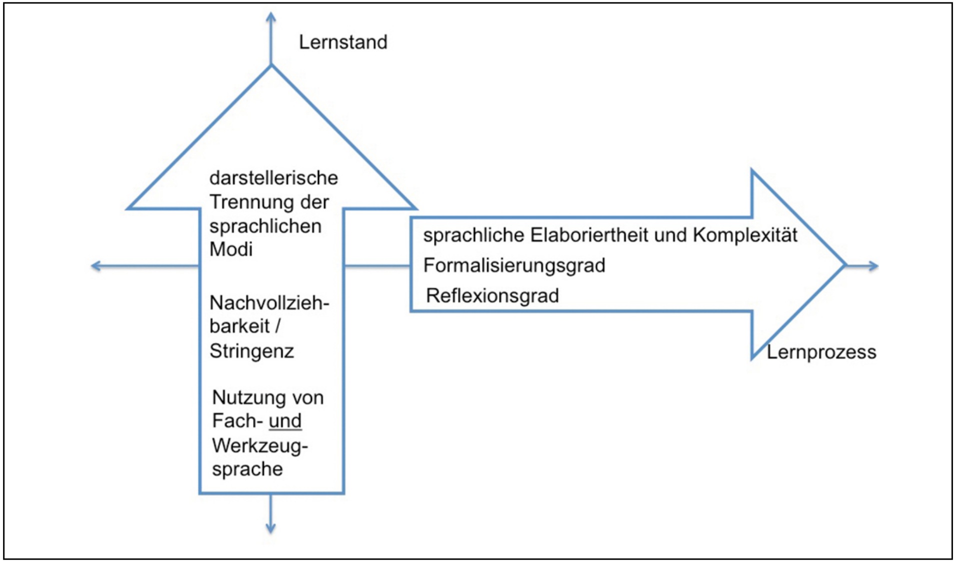


Abbildung 6.1c: Eine prozessorientierte Sicht auf Sprache (Bild aus Schacht 2016)

6.2 Eine prozessorientierte Sicht auf Dokumentationen

Es ist ein besonderes Potential digitaler Werkzeuge, dass Schülerinnen und Schüler mathematische Handlungen in ihrer Dynamik und auf einem präformalen Niveau erleben können. Es ist gerade im Unterricht eine besondere Herausforderung, dass die Schülerinnen und Schüler Raum für die Reflexion dieser Handlungen bekommen. Ein wichtiges Mittel, um solche Reflexionen zu initiieren, ist die Verschriftlichung. In vielen Aufgaben notieren Schülerinnen und Schüler ihre Beobachtungen und Hypothesen und dokumentieren und reflektieren so die vorangegangenen mathematischen Handlungen. Dabei ist die Herausbildung einer angemessenen mathematischen Fachsprache ein wichtiger Teil des Lernprozesses.

Die folgenden Schülerbeispiele entstammen der Arbeit einer Aufgabenserie zum Kontext Achsensymmetrie in Klasse 6, vgl. Hagemann 2006. In der speziellen Aufgabe sehen die Schüler bestimmte ebene Figuren (etwa: Punkte oder Vierecke), sowie die Bilder der Figuren, die durch eine Achsenspiegelung an einer unsichtbaren Spiegelachse erzeugt werden. Bewegen die Schülerinnen und Schüler nun einen Punkt der Figur, so bewegt sich der entsprechende Bildpunkt automatisch mit. Die Schülerinnen und Schüler sollen die Zusammenhänge zwischen den Figuren beschreiben. In Abbildung 6.1a schreibt Annabel zu Beginn ihrer Erkundungen:

Ich glaube, dass man die Vierecke gleichzeitig bewegen kann, weil das eine mit dem anderen verbunden ist.

Spannend ist diese Dokumentation deshalb, weil Annabel hier sprachlich eine Erfahrung zum Ausdruck bringt, die ohne das digitale Werkzeug kaum möglich war: die Erfahrung der Dynamik. Das Phänomen der Achsensymmetrie wird hier nicht mittels statischer Bilder erfahren, sondern durch das aktive Bewegen geometrischer Figuren. Das digitale Werkzeug stellt hier eine Art Black Box dar, von der die Schülerin zunächst nicht weiß, wie sie funktioniert: Die Vierecke sind miteinander verbunden, aber es ist nicht klar, in welcher Art und Weise. Es ist wichtig für den Unterricht, dass solche Erfahrungen reflektiert werden können. Die schriftliche Dokumentation solcher Beobachtungen – als Spiegel einer gedanklichen Reflexionsleistung – ist dabei eine wichtige Lerngelegenheit.

In den folgenden beiden Beispielen beschreiben die Schülerinnen ebenfalls ihre Entdeckungen:

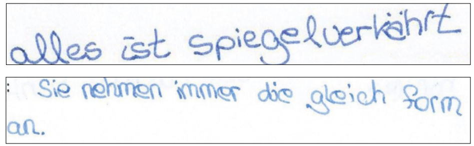


Abbildung 6.2a und 6.2b: Schülerdokumentation zur Achsensymmetrie

Diese beiden Dokumentationen zeigen den gedanklichen Prozess von der dynamischen Bewegung einzelner Punkte (und der entsprechenden Bewegung der Bildpunkte) hin zur Betrachtung der mathematischen Eigenschaften des zugrundeliegenden Phänomens. Die Schülerinnen fokussieren hier zunehmend auf die Auswirkungen der durchgeführten Handlungen (*nehmen immer die gleiche Form an*) bis hin zu der Beobachtung, dass die beiden Figuren spiegelverkehrt sind.

Alle drei Dokumentationen spiegeln einen Teil des gedanklichen Prozesses von der Beschreibung reiner Handlungen hin zur Beschreibung erster mathematischer Phänomene. Solche Prozesse sind typisch und wichtig für die Entwicklung von (Fach-) Sprache im Mathematikunterricht.

Gerade zu Beginn von Lernprozessen ist die genaue Beschreibung von Handlungen ein zentraler Ort der gedanklichen Strukturierung beim Schreiben. Es ist dabei aber ebenso typisch für die Entwicklung der Dokumentationskompetenz, dass die Beschreibung der einzelnen Handlungsschritte sich zunehmend auf die mathematischen Phänomene und Handlungen konzentriert und etwa die Dokumentation der Bedienung des Werkzeugs zunehmend in den Hintergrund tritt.

Den Schülerinnen und Schülern daher eine Entscheidungskompetenz für die Beurteilung der Frage zu vermitteln, welche Art der Dokumentation in welchen Situationen als angemessen gelten kann, ist ein wesentliches Merkmal eines für Sprache sensiblen Mathematikunterrichts.

6.3 Praxishilfen für die Arbeit im Unterricht

Das Erlernen der Fachsprache im Mathematikunterricht stellt für viele Lernende eine große Herausforderung dar. Diese wird angesichts der sprachlichen Anforderungen bei der Arbeit mit digitalen Werkzeugen sogar noch größer. Lernende nutzen im Unterricht eine werkzeugbezogene Sprache ebenso selbstverständlich wie die Umgangssprache und die mathematische Fachsprache. Ein Bewusstsein dafür, dass es sich hierbei um unterschiedliche Sprachebenen handelt, die prinzipiell voneinander getrennt werden sollten, muss im Unterricht explizit thematisiert werden.

Eine Hilfestellung bietet die Tabelle 6.3.1.

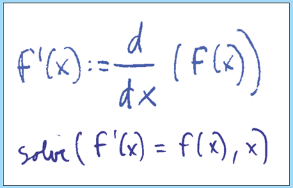
Das mache ich...	So sieht es im CAS / GTR aus...	Darauf muss ich achten...
Zunächst definiere ich die Funktion f mit $f(x) = 2\sin(x) + x^2$ Dann ermittele ich die Ableitungsfunktion f' und prüfe, ob die Funktion f Schnittpunkte mit f' hat.	 	Die Werte, die ich für x erhalte, kann ich aufgrund der Schnittpunkteigenschaft sowohl in f als auch in f' einsetzen, um die Punkte zu ermitteln.

Tabelle 6.3.1: Dokumentationshilfe für Bearbeitungen im Unterricht (mit Abbildung 6.3a und 6.3b)

Im Idealfall dokumentieren die Schülerinnen und Schüler ihr Vorgehen selbstständig in drei Schritten. Unterstützend kann ein solches technisches Arbeitsblatt vom Lehrenden vorstrukturiert und in den ersten beiden Spalten vorbereitet werden. Die Schülerinnen und Schüler protokollieren dann ihr Vorgehen in der dritten Spalte und reflektieren dabei ihren durchgeführten Lernprozess.

Die erste Spalte spiegelt zunächst die konkret handlungsbezogene Ebene. Hier wird notiert, welche mathematischen Handlungen ausgeführt werden. Im Unterricht sollte eine solche Beschreibung des mathematischen Vorgehens sorgfältig von der werkzeugbezogenen Beschreibung (Spalte 2, Tabelle 6.3.1) getrennt werden. In Spalte 3 können Anmerkungen zum Vorgehen sowie eigene Merkhilfen notiert werden.

6.4 Dokumentation der Lösung einer Klausuraufgabe zur Analysis

6.4.1 Vorbemerkungen

Bei der Lösung von Aufgaben mit Hilfe eines Computeralgebrasystems stellt sich die Frage, wie die Schülerinnen und Schüler ihren Lösungsweg dokumentieren sollen. Es gibt unter den Kolleginnen und Kollegen eine große Vielfalt von Meinungen, etwa hinsichtlich der Angabe von Sequenzen der gedrückten Tasten („ich drücke menu – 3 – 1“), hinsichtlich der Dokumentation der Rechnersyntax („ich gebe solve $(f(x)=5,x)$ ein“) oder der Beschränkung auf die mathematischen Formulierungen.

Dabei handelt es sich um eine Aufgabe, die an der B. M. V – Schule in Essen im dezentralen Abitur 2004 für einen Leistungskurs, der mit CAS gearbeitet hatte, eingereicht und genehmigt wurde. Als Hilfsmittel wurde damals DERIVE verwendet. Da die Aufgabe vor der Zeit der zentral vorgegebenen Operatoren gestellt wurde, sind hier nur leichte Anpassungen auf die aktuellen Operatoren vorgenommen worden. Interessant ist, dass eine ganz ähnliche Aufgabe im Zentralabitur von NRW des Jahres 2008 gestellt wurde. Es ist nicht bekannt, ob es sich dabei um einen Zufall handelte.

Die Sequenz von Screenshots zeigt, wie Schülerinnen und Schüler mit heutigen Hilfsmitteln die Aufgaben bearbeiten könnten. Die vorgeschlagene Dokumentation des Lösungsweges ist von dem verwendeten Hilfsmittel unabhängig.

Zunächst wird in Abschnitt 6.4.2 die Aufgabenstellung vorgestellt. In Abschnitt 6.4.3 finden sich Screenshots einer möglichen Schülerbearbeitung, die dann in Abschnitt 6.4.4 genauer erläutert werden. Für ein konkretes Beispiel findet sich dann in Abschnitt 6.4.5 eine mögliche Dokumentationsvariante in Klausuren.

6.4.2 Aufgabenstellung

Zum Zeitpunkt 0 erfolgte die Einnahme eines Medikamentes. Gemessen wurde die Wirkstoffmenge in der Leber. Zu den Messpunkten wurde eine Ausgleichskurve mit der Gleichung $w(t) = t\,(t+5)\cdot e^{-t}$ gezeichnet.

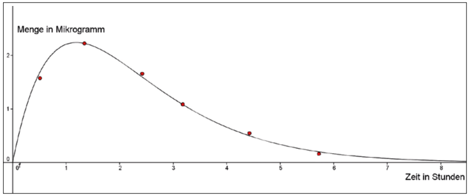


Abbildung 6.4a: Ausgleichskurve

a) Im Graphen sind ein Hoch- und ein Wendepunkt zu erkennen. Weisen Sie nach, dass es keine weiteren gibt.

b) Interpretieren Sie die Bedeutung des Extremums und des Wendepunktes in diesem Sachzusammenhang.

c) Stellen Sie dar, in welchem Zeitraum das Modell der Ausgleichskurve sicherlich nicht mehr die Realität beschreibt.

d) Für die medizinische Wirksamkeit eines Medikamentes kommt es neben der Menge des Wirkstoffes auch auf die Zeit an, in der der Wirkstoff für den Körper zur Verfügung steht. Das Produkt aus Menge und Zeit wird ‚Wirksamkeit' genannt. Beschreiben Sie, wie die Wirksamkeit bestimmt wird, wenn die Menge des Wirkstoffes wie in diesem Fall durch eine Funktion gegeben ist, und berechnen Sie die Wirksamkeit für diese Funktion.

e) Für die Mediziner gilt das Medikament als abgebaut, wenn die Wirkstoffmenge unter der Nachweisgrenze von 0,01 µg liegt. Von welchem Zeitpunkt an kann das Medikament als abgebaut gelten?

f) Die Gleichung in Teil e) lässt sich nicht algebraisch lösen. Skizzieren Sie als ein Beispiel eines nummerischen Verfahrens das Newtonverfahren und berechnen Sie mit dem Startwert 6 die beiden ersten Näherungswerte für die Lösung der Gleichung aus Teil e).

g) Eine genauere Untersuchung des Wirkstoffgehaltes während der ersten halben Stunde ergibt den dargestellten Graphen.

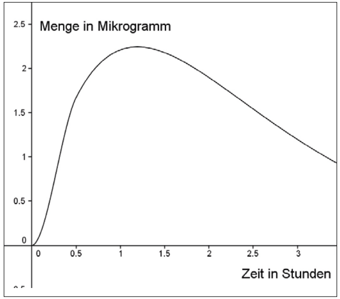


Abbildung 6.4b: Graph der gesuchten Funktion

Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung für die erste halbe Stunde.
Zum Zeitpunkt $t = 0{,}5$ sollen der Graph der gesuchten Funktion und der Graph der Funktion w ohne Knick aneinander passen.

h) Sollten die Mediziner bei der Bestimmung der Wirksamkeit des Medikamentes mit der Funktion aus Teil a) oder der aus Teil g) arbeiten? Geben Sie eine begründete Empfehlung.

6.4.3 Sequenz von Screenshots aus einer möglichen Schülerbearbeitung

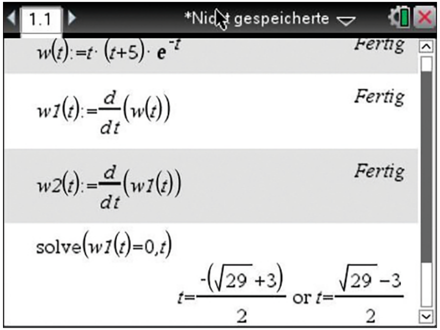


Abbildung 6.4c

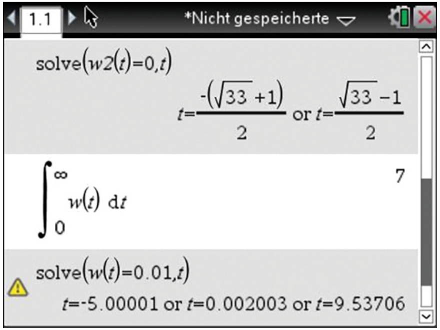


Abbildung 6.4d

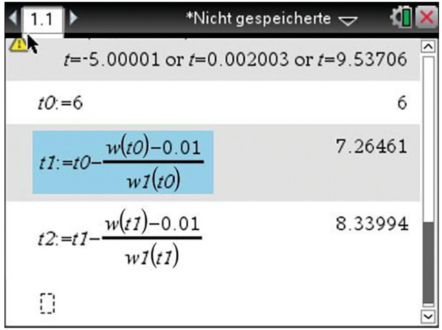


Abbildung 6.4e

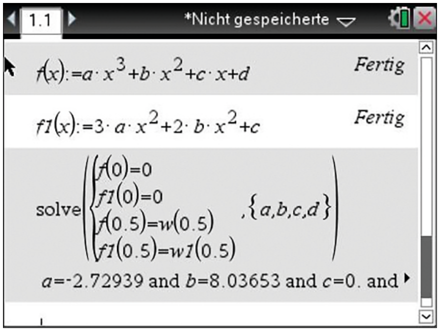


Abbildung 6.4f

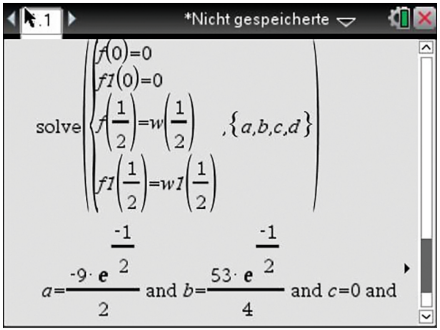


Abbildung 6.4g

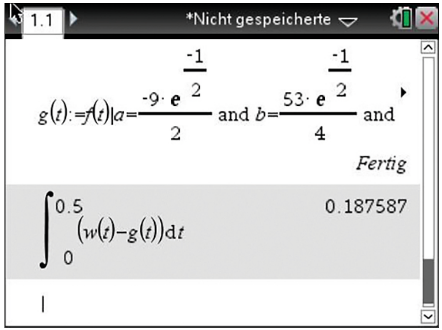


Abbildung 6.4h

6.4.4 Dokumentation der Schülerlösung

Die Verweise auf die Screenshots gehören nicht zur Schülerlösung. Sie dienen nur dazu, für den Leser den Zusammenhang klarzustellen.

a) Extremwertuntersuchung:
Untersuche den Graphen von w auf waagerechte Tangenten:

$$w'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{\sqrt{29}+3}{2} \vee t = \frac{\sqrt{29}-3}{2} \approx 1{,}19$$

(siehe Bild 6.34c).

Die negative Lösung ist im Anwendungskontext nicht relevant. Somit gibt es keine weiteren waagerechten Tangenten, also auch keine weiteren Extrema.

Wendepunktuntersuchung:
Untersuche den Graphen von w' auf Extrema:

$$w''(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{\sqrt{33}+1}{2} < 0 \vee t = \frac{\sqrt{33}-1}{2} \approx 2{,}37$$

(siehe Bild 6.4d).

Der Graph von w' hat im positiven Bereich nur eine waagerechte Tangente, also keine weiteren Extrema. Damit hat der Graph von w keine weiteren Wendepunkte.

b) Extremum: maximaler Wirkstoffgehalt;
Wendepunkt: maximale Abbaurate des Wirkstoffs.

c) Außer für $t = 0$ hat der Graph keine weiteren Nullstellen. In der Realität ist der Wirkstoff irgendwann abgebaut.

d) Da die Wirkstoffmenge nicht konstant ist, muss die Multiplikation durch Integration ersetzt werden:

$\int_0^\infty w(t)\,dt = 7$ (siehe Bild 6.4d).

e) Betrachte die Gleichung $w(t) = 0{,}01$. Numerisches Lösen liefert die Lösungen 0,002 oder 9,54. Zusätzlich wird eine negative Lösung angegeben, die im Sachkontext keine Bedeutung hat. Der Rechner gibt die Warnung aus, dass es weitere Lösungen geben könnte (siehe Bild 6.4d).

Da für $t > 0$ nur ein Maximum vorliegt, kann es jedoch keine weiteren Lösungen geben. Die erste Lösung gehört zu dem Zeitintervall, in dem die Wirkstoffmenge erst aufgebaut wird.

Das Medikament kann somit nach etwa 9,5 Stunden als abgebaut gelten.

f) Das Verfahren kann beschrieben oder auch durch eine Graphik dargestellt werden.
Beispiel einer Berechnung:
Startwert 6: $t_0 = 6$;

$$t_1 = t_0 - \frac{w(t_0)-0{,}01}{w'(t_0)} \approx 7{,}26\,;\; t_2 = t_1 - \frac{w(t_1)-0{,}01}{w'(t_1)} \approx 8{,}34$$

(siehe Bild 6.4e).

g) Da im Graphen ein Wendepunkt zu sehen ist, muss es sich um eine Funktion mindestens dritten Grades handeln. Wähle den minimalen Grad: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Bedingungen:

$f(0) = 0$ (Verabreichung des Wirkstoffes zum Zeitpunkt 0);

$f'(0) = 0$ (waagerechte Tangente bei 0 im Graphen erkennbar);

$f(0{,}5) = w(0{,}5)$; $f'(0{,}5) = w'(0{,}5)$
(die Graphen passen ohne Knick aneinander);

Lösung des Gleichungssystems:

$$a = -\frac{31}{\sqrt{e}} \wedge b = \frac{53}{2\sqrt{e}} \wedge c = 0 \wedge d = 0$$

(siehe Bilder 6.4f und 6.4g).

Somit ist $g(t) = -\frac{31}{\sqrt{e}}t^3 + \frac{53}{2\sqrt{e}}t^2$

eine mögliche Funktionsgleichung.

Berechne den Unterschied in der Wirksamkeit:

$$\int_0^{0,5} (w(t) - g(t))\,dt \approx 0,1.$$

Das entspricht 1,4 % der Gesamtwirksamkeit (siehe Bild 6.4h).

Folgende Argumentationen sind möglich:

- Dieser Unterschied ist zu gering, deshalb sollte mit der einfacheren Funktion gearbeitet werden.

- Der Unterschied ist relevant, deshalb sollte mit der zusammengesetzten Funktion gearbeitet werden.

6.4.5 Praxishilfen für die Lernerfolgskontrolle

In diesem Abschnitt wird ein konkretes Beispiel für eine Dokumentationsvariante im Rahmen einer Lernerfolgskontrolle diskutiert. Zur besseren Übersicht wird die in Abschnitt 6.3 vorgestellte Strukturierungshilfe genutzt, wobei für die Lernerfolgskontrolle auf die dritte Spalte *(Darauf muss ich achten...)* verzichtet wird. Unterschieden werden hier nur die mathematik- und die werkzeugbezogene Beschreibung des Vorgehens. Dazu wird im Folgenden ein Beispiel aus Aufgabenteil a) in Abschnitt 6.4.2 gewählt, in dem nachgewiesen werden muss, dass es neben den abgebildeten keine weiteren Hoch- oder Wendepunkte gibt.

Weil Sprache im Mathematikunterricht immer auch Reflexionsgegenstand ist, werden die Schülerinnen und Schüler zunehmend sicherer im Umgang mit der mathematischen Fachsprache und lernen, diese von werkzeugbezogenen Beschreibungen zu trennen. In der Regel notieren sich Lernende gerade zu Beginn neuer Inhalte und neuer Umgangsweisen mit dem digitalen Werkzeug noch sehr genau konkrete Tastenkombinationen für bestimmte Funktionalitäten. Die Lernenden sollten dann zunehmend ein Gespür dafür entwickeln, dass die Angabe von Werkzeugbefehlen kein Ersatz für die Beschreibung eines Lösungsweges sein kann. Dennoch ist es in vielen Situationen hilfreich und auch notwendig, den Einsatz des Werkzeugs zu dokumentieren. Damit dabei die sprachlichen Ebenen bewusst getrennt werden können, ist eine solche Tabelle auch in der Praxis – etwa hinsichtlich einer entsprechenden Strukturierung des Heftes – durchaus hilfreich.

Die Lösungsschritte machen den dokumentationsbezogenen Erwartungshorizont für dieses Beispiel deutlich. Die Lernenden beschreiben ihr Vorgehen mit mathematischer Fachsprache (Spalte 1) und trennen diese sprachliche Ebene von den werkzeugbezogenen Beschreibungen in Spalte 2. In der Lernzielkontrolle ist die Bedeutung der rechten Spalte nun unerheblich, da diese je nach Verwendung des Werkzeuges sehr unterschiedlich aussehen wird.

Mathematisches Vorgehen und Lösungen	**Arbeit mit dem CAS / GTR**
Ich bestimme zunächst die erste und zweite Ableitungsfunktion von f. Die möglichen Extremstellen bestimme ich mit den notwendigen Bedingungen unter Verwendung der ersten Ableitung, d. h. ich suche Stellen, wo die Steigung Null ist: $x_{1/2} = \ldots$ Es werden nun hinreichende Kriterien geprüft, um die möglichen Extrema zu bestätigen oder zu verwerfen und die Art der Extrema herauszufinden.	solve $(f'(x)=0,x)$

Tabelle 6.4.1: Dokumentationshilfe für Bearbeitungen im Unterricht

7. Konsequenzen

Der entscheidende Aspekt, den Lehrerinnen und Lehrer bei der Nutzung von Digitalen Werkzeugen im Mathematikunterricht beachten sollten, ist: Es geht in erster Linie um die Mathematik! Die Werkzeuge – auch die digitalen Werkzeuge – sind dafür da, besser Mathematik zu lernen, zu lehren und zu betreiben. Dies wird in dem berühmten Spruch „Es gibt kein Stricken ohne Wolle“ zum Ausdruck gemacht. Aber es sei auch gesagt: „Es gibt auch kein Stricken ohne Nadeln!“

Die Verbindung von „alten“ und „neuen“ Werkzeugen darf dabei nicht außer Acht gelassen werden. Diese bilden keinen Gegensatz, die neuen lösen die alten nicht ab. Vielmehr ergänzen sie sich gegenseitig und bieten vorher nicht gekannte Möglichkeiten zur Handlungsorientierung.

Der Einsatz digitaler Werkzeuge hat insgesamt, auch gerade im Zeitalter der Kompetenzorientierung, Auswirkungen auf die gesamte Unterrichtskultur und auf die Struktur des Unterrichts. Mit dem Dreieck Medien–Methoden–Kompetenzen und dem Zusammenhang mit überfachlichen Lernkompetenzen beschäftigten sich intensiv Elschenbroich & Heintz (2008).

7.1 Entschleunigung und Zielgerichtetheit, systematische Variation und dynamische Visualisierung

Es ist hilfreich, sich darüber klarzuwerden, was jeweils mathematische Kompetenzen sind und was Werkzeugkompetenzen. Die Bedienkompetenz bildet das Fundament, um das Werkzeug bedienen zu können. Bei der Nutzung werden Phänomene deutlich, zum Beispiel die bewegten Punkte, die der Benutzer deuten und interpretieren muss, damit er nicht auf der phänomenologischen Ebene stehen bleibt. Es entstehen Hypothesen, die mithilfe mathematischer Argumentationen angenommen oder verworfen werden müssen. Die Güte der erarbeiteten Lösung muss reflektiert und auf das mathematische Problem zurückbezogen werden.

Die Auswahl des jeweiligen Werkzeugkoffers wirkt mit bei der Qualität der Lösung. Die Kompetenz, das geeignete Werkzeug auszuwählen, muss langsam aufgebaut werden. So verquicken sich Mathematik treiben und Werkzeug nutzen miteinander.

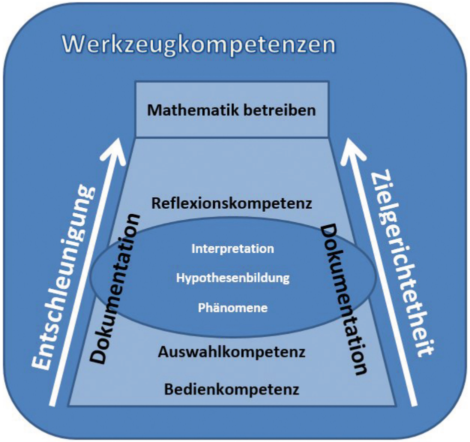


Abbildung 7.1a: Werkzeugkompetenzen

Entscheidend ist dabei, ob der Einsatz des digitalen Werkzeuges einen technischen Aufwand oder einen Mehrwert mit sich bringt. Dabei sind insbesondere die nachfolgenden Aspekte relevant:

- Gerade bei mächtigen Werkzeugen besteht die Gefahr, einen für den Aufbau von Verständnis zu großen und zu schnellen Schritt zu gehen. Es ist immer darauf zu achten, ob eine Entschleunigung des Prozesses angebracht ist, z. B. entsteht das Verständnis durch das manuelle Durcharbeiten verschiedener Schritte und das Berechnen von konkreten Beispielen, siehe ☛ *Kapitel 5*.

- Je mächtiger und vielfältiger ein Werkzeug ist, desto wichtiger wird seine zielgerichtete Nutzung. Das wurde in den vielfältigen Unterrichtsbeispielen bei der Nutzung von Multirepräsentationswerkzeugen aufgezeigt, siehe ☛ *Kapitel 3*, ☛ *Kapitel 5* und Abbildung 7.1a.

- Moderne Software bietet mit Tabellen, beweglichen Punkten und veränderbaren Zahlen (Schiebereglern) bei vielen Problemen gute Gelegenheiten zur systematischen Variation. Damit wird das Experimentieren und Explorieren gestärkt, und der Aspekt der Satzfindung bekommt einen größeren Stellenwert.

- Die Umsetzung von umfangreichen Rechnungen in Diagrammen und Graphen, die Dynamisierung von geometrischen Konstruktionen, das Erzeugen von Ortslinien, die Dynamisierung von Parametern bei Funktionen und die Umsetzung in Funktionsgraphen sind typische und überzeugende Beispiele für dynamische Visualisierung. Ein Bild sagt halt mehr als tausend Zahlen. Dynamische Visualisierung ist mehr als bloße Veranschaulichung. Sie ist aber kein didaktischer Vorteil zum Nulltarif, sondern zusammen mit der systematischen Variation eine erheblich gesteigerte Anforderung, die ggf. auch eigene gesteigerte Anstrengungen erfordert.

- Für jedes Problem ein eigenes Werkzeug einzusetzen, erscheint nur auf den allerersten Blick zielgerichtet. Dadurch würde der Anteil an Bedienkompetenzen auf Kosten der Mathematik erheblich erhöht. Deswegen plädieren wir dafür, nur wenige digitale Werkzeuge zu nutzen – ggf. nur eines – und dabei dann zielgerichtet die Repräsentationsform auszuwählen.

Natürlich muss man den Umgang mit Werkzeugen erlernen. Dies ist schon ein eigenes Thema und erfordert eigene Zeit. Das darf aber von Umfang und Schwerpunktsetzung her nicht die Mathematik an den Rand drängen. Wenn man sich in der Schule auf wenige Werkzeuge einigt, im Idealfall auf eins, dann reduziert dies automatisch die Zeit, die man braucht, um mit dem Werkzeug souverän umzugehen.

Die Beispiele in *Kapitel 3* und *Kapitel 5* verdeutlichen, dass es beim Einsatz von digitalen Werkzeugen immer um die Mathematik geht und dass Multirepräsentationssysteme hilfreiche Lernwerkzeuge sind, um fachliche Inhalte zu erarbeiten, die den Lernprozess unterstützen und den Schülerinnen und Schülern unterschiedliche Zugänge ermöglichen. Es liegt in Lehrerhand, je nach Vorkenntnissen und Fähigkeiten der Lerngruppe Beispiele und Möglichkeiten auszuwählen und didaktisch zu gestalten. Die aufgeführten Beispiele zeigen den Mehrwert digitaler Werkzeuge in allen Jahrgangsstufen. Das heißt auch, man kann überall einsteigen. Dabei wird nicht vom Werkzeug, sondern von der Mathematik aus gedacht, die Werkzeuge werden nicht um des Werkzeugs willen verwendet.

7.2 Aufbau von Werkzeugkompetenzen – Einsteigen über „Handytarife“

Für die Verwendung der digitalen Werkzeuge im Mathematikunterricht sind eine ganzheitliche Betrachtung an der Schule und die konzeptionelle Integration in ein Medienkonzept notwendig. Der Einsatz digitaler Werkzeuge kann nur erfolgreich sein, wenn er nicht nur von einem einzelnen Fach aus geplant wird. Jede Schule muss ein alle Fächer umfassendes Medienkonzept erstellen, und auf der Ebene der Schulträger ist auch ein stringenter Medienentwicklungsplan erforderlich, der auch die Mathematik- und Informatik-Lehrkräfte aus der Rolle des Systembetreuers holt (Elschenbroich 2016).

Während dem einen ein systematischer Aufbau von Werkzeugkompetenzen hilft (siehe *Kapitel 4.2*.), der sinnvoll über die einzelnen Jahrgangstufen verteilt ist, ist für den anderen ein exemplarisches Unterrichtsbeispiel hilfreicher. Ein beliebtes (Anwendungs-) Beispiel, das (noch) in fast jeder Jahrgangstufe 7 behandelt wird, sind Handytarife im inhaltlichen Zusammenhang mit linearen Funktionen.

Der Zugang zu diesem mathematischen Thema kann auf unterschiedlichen methodischen Wegen geschehen, mit weniger oder mit mehr technischer Unterstützung. Der Einsatz von dynamischen Arbeitsblättern und Lernumgebungen reduziert die Komplexität und den Zeitbedarf dabei erheblich.

Ziel der Darstellung dieses Beispiels ist es, die zwei Zugänge gegenüberzustellen:

- Zugang ohne vom Lehrer vorstrukturiertem Arbeitsblatt, das heißt vom leeren Bildschirm aus,
- Zugang durch Einsatz eines vorbereiteten Arbeitsblattes .

Beide Varianten haben Stärken und Schwächen, beinhalten Chancen und Hürden. Dabei kommt es in erster Linie auf die Lehrkraft an, welcher Zugang bevorzugt wird. Wir zeigen hier auf, dass der mathematische Gehalt und der Anspruch an die Dokumentationskompetenz der Schülerinnen und Schüler gleichbleiben, jedoch unterschiedliche Ansprüche an Bedienkompetenz entstehen.

Die Unterschiede der Zugänge werden im Detail aufgezeigt. Dabei werden die einzelnen Facetten an Werkzeugkompetenzen, Bedien-, Auswahl-, Reflexions- und Dokumentationskompetenzen sowie der mathematische Gehalt identifiziert. Die beigefügten Screenshots sind hier mit GeoGebra erstellt, die Umsetzung mit anderen Multirepräsentationsprogrammen kann jedoch analog geschehen.

Die Klasse bekommt den Auftrag, drei verschiedene Handytarife, die durch eine Tabelle gegeben sind, zu untersuchen und zu vergleichen.

	Tarif 1	**Tarif 2**	**Tarif 3**
Grundgebühr pro Monat in Euro	3,00	7,00	21,00
Preis pro min in Euro	0,25	0,12	-

Abbildung 7.2a: Daten zur Aufgabenstellung Handytarife

Betrachtet man den Unterrichtsgang in einer Stunde, werden die Schülerinnen und Schüler in der Regel erst einmal Vermutungen äußern, welcher Tarif günstig ist, und einige Werte exemplarisch ausrechnen. Möchte man jedoch begründet die einzelnen Tarifangebote vergleichen, wird die Betrachtung einzelner Werte nicht ausreichen. Da das Berechnen von sehr vielen Werten sehr mühsam und zudem langweilig ist, liegt es auf der Hand, mit einem digitalen Werkzeug als Mehrwert z. B. in der Tabellenkalkulation systematisch rechnen.

Eine Videodokumentation eines Unterrichtsgangs in der Variante I steht zur Verfügung.

7-2_handytarife.mp4
www.mnu.de/weko/7-2_handytarife.mp4

Einsatz nur für persönliche, nicht kommerzielle Nutzung.

Variante I: Zugang vom leeren Bildschirm aus	**Variante II: Zugang über ein vorstrukturiertes Arbeitsblatt**

Mathematische Klärung: Was sind die unabhängigen Variablen / Eingangsgrößen (Grundgebühr pro Monat, Preis pro Minute), was sind die abhängigen Variablen / Ausgangsgrößen (Kosten pro Monat)?

Dokumentationskompetenz:

- Zuordnung der abhängigen und unabhängigen Variablen, Bezeichnung der Koordinatenachsen

Variante I:

Auswahlkompetenz:

- Variante 1: Arbeiten mit dem Algebra-Fenster (Berechnung von zwei oder vielen Datenpunkten)
- Variante 2: Arbeiten mit dem Grafikfenster
- Variante 3: Arbeiten mit der Tabellenkalkulation (Hinweis: Nur dieser Zugang wird hier weiter dargestellt.)

Mathematische Grundlagenkenntnis:

- Erstellen von geeigneten Formeln

Bedienkompetenz:

- Erstellen eine Tabelle und Eingeben von geeigneten Formeln
- Automatisches Vervollständigen der Tabelle

Variante II:

Arbeiten mit der vorstrukturierten Tabelle:

- Deutung der Tabelle und Durchdringung der mathematischen Zusammenhänge

Mathematische Grundlagenkenntnis:

- Deuten der vorgegebenen Formeln
- Eingeben von geeigneten Formeln, falls nicht alle Spalten der Tabelle vorgeben sind

Bedienkompetenz:

- Eventuell: Eingeben von geeigneten Formeln
- Automatisches Vervollständigen der Tabelle

Variante I: Zugang vom leeren Bildschirm aus	**Variante II: Zugang über ein vorstrukturiertes Arbeitsblatt**

	A	B	C	D
1	min	Tarif 1	Tarif 2	Tarif 3
2	0	0	0	21
3	1	3.25	7.12	21
4	2	3.5	7.24	21
5	3	3.75	7.36	21
6	4	4	7.48	21
7	5	4.25	7.6	21
8	6	4.5	7.72	21
9	7	4.75	7.84	21
10	8	5	7.96	21
11	9	5.25	8.08	21
12	10	5.5	8.2	21
13	11	5.75	8.32	21
14	12	6	8.44	21
15	13	6.25	8.56	21
16	14	6.5	8.68	21
17	15	6.75	8.8	21
18	16	7	8.92	21
19	17	7.25	9.04	21
20	18	7.5	9.16	21
21	19	7.75	9.28	21
22	20	8	9.4	21

Abbildung 7.2b: Lösungsdarstellung bei Zugang über die Tabellenkalkulation

Variante I: Zugang vom leeren Bildschirm aus	**Variante II: Zugang über ein vorstrukturiertes Arbeitsblatt**

Bedienkompetenz: Die Tabelle kann visuell aufbereitet werden, indem die Zeilen, in denen einzelne Tarife günstig sind, unterschiedlich gefärbt werden, wenn das gewünscht wird.

	A	B	C	D
22	20	8	9.4	21
23	21	8.25	9.52	21
24	22	8.5	9.64	21
25	23	8.75	9.76	21
26	24	9	9.88	21
27	25	9.25	10	21
28	26	9.5	10.12	21
29	27	9.75	10.24	21
30	28	10	10.36	21
31	29	10.25	10.48	21
32	30	10.5	10.6	21
33	31	10.75	10.72	21
34	32	11	10.84	21
35	33	11.25	10.96	21
36	34	11.5	11.08	21
37	35	11.75	11.2	21
38	36	12	11.32	21
39	37	12.25	11.44	21
40	38	12.5	11.56	21
41	39	12.75	11.68	21

Abbildung 7.2c: Lösungsdarstellung – schrittweise Untersuchung von Intervallen

Variante I: Zugang vom leeren Bildschirm aus	**Variante II: Zugang über ein vorstrukturiertes Arbeitsblatt**

Auswahlkompetenz:
Arbeiten mit dem Grafikwerkzeug oder mit der Tabellenkalkulation

Bedienkompetenz (bei Arbeit mit dem Grafikwerkzeug):

- Erzeugen und Anzeigen der Graphenpunkte
- Um die Übersicht zu behalten: Erstellen einer neuen Tabelle in 10-Minuten-Schritten

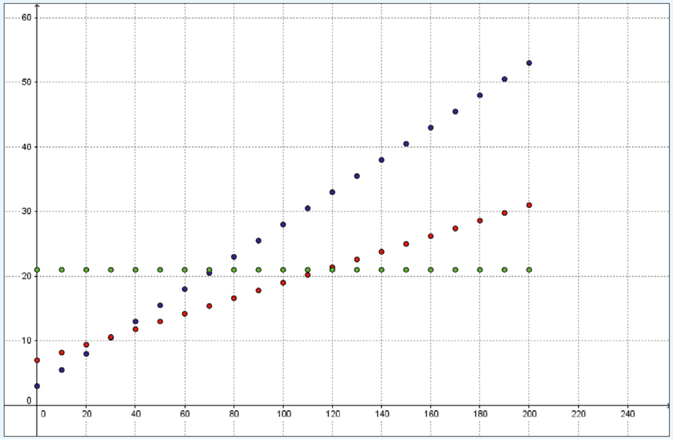


Abbildung 7.2d: Lösungsdarstellung: grafischer Zugang.

Variante I: Zugang vom leeren Bildschirm aus	**Variante II: Zugang über ein vorstrukturiertes Arbeitsblatt**

Mathematische Deutung und Dokumentationskompetenz:

- Alle Punkte liegen offensichtlich jeweils auf einer Geraden.
- Im Grafik-Fenster sieht man schon gut, welcher Tarif bei welchen Gesprächsdauern günstig ist (bis ca. 30 min, bis ca. 115 min). Will man es noch genauer haben, schaut man minutenweise in der Tabelle nach.
- Die Zeitpunkte, an denen sich der günstigste Tarif ändert, ergeben sich aus den Schnittpunkten der Geraden.

Bedienkompetenz:

- Schnittpunkte und ihre Koordinaten ermitteln

Sachbezogene Deutung und Dokumentationskompetenz:

- Schnittpunkte im Kontext deuten
- Kontextbezogenes Runden: 116.67 min ist keine sinnvolle Angabe.

Reflexionskompetenz und Dokumentationskompetenz:

- Die unterschiedlichen Repräsentationsformen einer Funktion: Tabelle, Geometrie/Graphik und Algebra/Funktionen ggf. auch CAS wurden verwendet. Klärung: Welche Repräsentationsform konnte welche Ergebnisse mit welcher Güte liefern?

Mögliche Variation der Ausgangsdaten:

- Die Werte für Grundgebühr und Minutenpreis sollen manuell geändert werden.
- Die Tarife werden dynamisch variiert durch einen Schieberegler.

Variante I: Zugang vom leeren Bildschirm aus	**Variante II: Zugang über ein vorstrukturiertes Arbeitsblatt**
Bedienkompetenz: • Umgang mit Schiebereglern, Einsatz als Koeffizienten (Parameter).	Hierzu kann ein weiteres geeignet formatiertes Arbeitsblatt zur Verfügung gestellt werden.

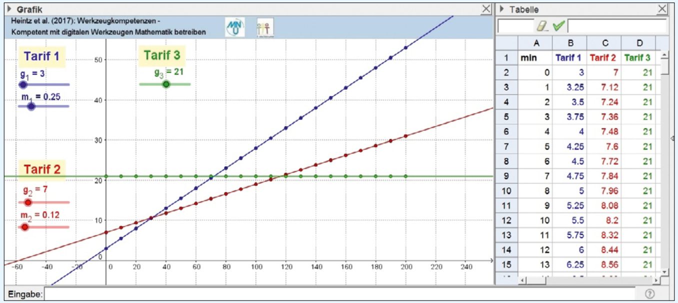


Abbildung 7.2e: Lösungsdarstellung – Variation der Ausgangsdaten

Mathematische Deutung und Dokumentationskompetenz:

- Bei entsprechendem Aufbau der Tabelle und der Gleichungen werden die Auswirkungen der Ausgangsdaten beobachtet und gedeutet.

Mathematischen Kompetenzen, die insgesamt gefördert werden:

- Aufstellen von Wertetabellen
- Verwendung von Geraden statt diskreter Punkte
- Eingabe von Termen linearer Funktionen
- Lösen von linearen Gleichungen

Variante I: **Zugang vom leeren Bildschirm aus**	**Variante II:** **Zugang über ein vorstrukturiertes Arbeitsblatt**
• Interpretieren von Schnittpunkten in Bezug auf Problemstellung • Dynamische Variation von Parametern • Dynamische Visualisierung durch Graphenpunkte und Geraden.	
Bedienkompetenzen, die insgesamt gefördert werden: • Einsatz von Schiebereglern • Aufbau einer Tabelle • Eingabe von Formeln in Tabellenzellen • Automatisches Ausfüllen einer Tabelle • Erzeugen von Punkten / Punktlisten aus Tabellenspalten • Erzeugen von Geraden durch zwei Punkte • Definieren und Zeichnen von linearen Funktionen • Bestimmung von Schnittpunkten von Geraden • Anzeigen / Ablesen von Koordinaten im Algebra- oder Grafik-Fenster.	**Bedienkompetenzen, die insgesamt gefördert werden:** • Eingabe von Formeln in Tabellenzellen • Automatisches Ausfüllen einer Tabelle einer Tabelle • Erzeugen von Geraden durch zwei Punkte • Definieren und Zeichnen von linearen Funktionen • Bestimmung von Schnittpunkten von Geraden • Anzeigen / Ablesen von Koordinaten im Algebra- oder Grafik-Fenster.

Dieser Vergleich macht deutlich, dass es auch bei der Verwendung von digitalen Werkzeugen im Zentrum um die Mathematik geht und die Zugänge sich nur im Anspruch an Bedienkompetenz unterscheiden. Multirepräsentationssysteme sind, siehe *Kapitel 2*, hilfreiche Lernwerkzeuge um fachliche Inhalte zu erarbeiten, die den Lernprozess unterstützen und den Schülerinnen und Schülern unterschiedliche Zugänge ermöglichen. Es liegt in Lehrerhand, je nach Vorkenntnissen und Fähigkeiten der Lerngruppe Beispiele und technische Möglichkeiten auszuwählen und didaktisch zu gestalten.

VORLIEGENDE DATEIEN

7-2_handytarife-Ia.ggb
www.geogebra.org/m/KtA6g92V

7-2_handytarife-Ib.ggb
www.geogebra.org/m/FPKJpxxX

7-2_handytarife-II.ggb
www.geogebra.org/m/U7HEnrTa

7-2_handytarife.tns
www.mnu.de/weko/7-2_handytarife.tns

7.3 Ausbildung und Fortbildung als Unterstützungsmaßnahme

Neben den konkreten Unterrichtsbeispielen in ☛ *Kapitel 5* und dem Medienkonzept in ☛ *Kapitel 4.2* sind Unterstützungssysteme für die Implementation der digitalen Werkzeuge an den Schulen notwendig. Dabei sind Adressatenbezug und Langfristigkeit bei der Ausrichtung einer Fortbildung entscheidende Gütekriterien. An den Schulen besteht großes Interesse und großer Bedarf an Qualifizierungen für den Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht, die das fachdidaktische Potential dieser Werkzeuge (und weniger reine Bedienkompetenzen) vermitteln können. Wichtig ist, dass Fortbildungen nicht vereinzelt und sporadisch erfolgen, sondern als kontinuierliche professionelle Entwicklungshilfe konzipiert und durchgeführt werden.

Wir halten es bei Fortbildungen zu digitalen Werkzeugen für zentral, dass die Mathematik selbst im Mittelpunkt steht sowie die Frage, wie dabei digitale Werkzeuge einen didaktischen Mehrwert erbringen können. Eine reine Bedienungsschulung der Kolleginnen und Kollegen wird dem didaktischen Potential digitaler Werkzeuge nicht gerecht und führt zu einer unnötigen Konfrontation zwischen mathematischen Inhalt und Geräten. Schrittweise muss das ausgewählte Werkzeug eine schulische Integration finden, vom Konzept und von der Idee der Veränderung der Unterrichtskultur her.

8. Abschluss: Zu guter Letzt

Das gesamte Werk hat aufgezeigt: Mit der Konzentration auf die Mathematik kann der Angst vor dem Übermaß an Technik bei dem Einsatz digitaler Werkzeuge gegengesteuert werden. Bei aller positiven Einschätzung des Potentials digitaler Werkzeuge für den Mathematikunterricht darf jedoch nicht übersehen werden, dass mit jedem neuen Werkzeug eine zusätzliche Ebene und Komplexität ins Spiel kommen. Jedes Werkzeug muss verstanden und beherrscht werden, was neben geistigen Ressourcen auch zeitliche und nicht zuletzt finanzielle Ressourcen erfordert.

Schupp spricht hier von einem faustischen Pakt (Schupp 2017): „Mit jedem Medium, das wir an der Schule einführen, schließen wir einen ‚faustischen Pakt', und wir sollten beachten, dass es an die Stelle wichtiger Ziele des Mathematikunterrichts treten und damit kontraproduktiv werden könnte". Für uns heißt das: Wir gewinnen mit dem Einsatz der digitalen Werkzeuge an manchen Stellen Vorteile beim Unterrichten, aber wir müssen darauf achten, dass die technischen Fragen nicht die Vorherrschaft über die Mathematik erhalten dürfen. Die Klauseln dieses faustischen Paktes können wir dann vermeiden, wenn wir weiterhin im Blick behalten, sorgfältig Mathematik zu betreiben.

Literatur

Bruner, J. S. , Oliver, R. S. & Greenfield, P. M. (1971): Studien zur kognitiven Entwicklung. Stuttgart: Kohlhammer. Online Lexikon für Psychologie und Pädagogik, URL *http://lexikon.stangl.eu/12401/eis-prinzip/* [Abruf: 2.12.2016]

Barzel, B. (2015): Arbeiten mit CAS aus fachdidaktischer Perspektive. Zum 65. Geburtstag von Hans-Jürgen Elschenbroich, in: Heintz, G., Pinkernell, G. & Schacht, F. (Hrsg.): Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht. Festschrift für Hans-Jürgen Elschenbroich (S. 40 – 54). MNU Verlag K. Seeberger, Neuss.

Biehler, R., Dutkowski, W., Elschenbroich, H.-J., Heintz, G., Hollendung, K. & Kuzle, A. (2014): Geometrie lehren und lernen – kompetenzorientiert und dynamisch. In: Medienbrief 2/2014. LVR Zentrum für Medien und Bildung.

Duval, R. (2002): Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. In: Hitt, F. (Hrsg.) (2002). Representations and Mathematics Visualization. Mexiko: Cinvestav-IPN.

Elschenbroich, H.-J. (2016): Gedanken zum Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht. In: MNU journal 6/ 2016. Verlag Klaus Seeberger, Neuss. S. 370 – 374.

Elschenbroich, H.-J. (2011): Digitale Medien und Werkzeuge im Mathematikunterricht. In: Elschenbroich / Greefrath (Hrsg.): Mathematikunterricht mit digitalen Medien und Werkzeugen. MV-Wissenschaft, S. 8 –10

Elschenbroich, H.-J. (2007): Lernmittelkonzept Mathematik – Beratungshilfe für Fachkonferenzen und Kompetenzteams. Medienberatung NRW. URL: *http://www.medienberatung.schulministerium.nrw.de/Medienberatung/Publikationen/aktuelle-Publikationen/LMK_Mathe.html* [Zugriff am: 04.12.16]

Elschenbroich, H.-J. & Heintz, G. (2008): Kompetenzen und Methoden. In: Elschenbroich, H.-J. & Heintz, G. (Hrsg.): Medien – Methoden – Kompetenzen. Der Mathematik-Unterricht (54), Heft 6

Europäisches Parlament, Rat der Europäischen Union (2006): Empfehlung des Europäischen Parlaments und des Rates vom 18. Dezember 2006 zu Schlüsselkompetenzen für lebensbegleitendes Lernen. URL: *http://eur-lex.europa.eu/legal-content/DE/TXT/?uri=CELEX:32006H0962*. [Zugriff am 13.06.2014]

Hagemann, M. (2015): Ein empirisches Projekt zu sprachlichen Phänomenen bei geometrischen Erkundungen mit GeoGebra im Mathematikunterricht der Jahrgangsstufe 7. Unveröffentlichte Abschlussarbeit. TU Dortmund.

Heintz, G. (2016): Handlungsorientierung mit alten und neuen Werkzeugen, in: Heintz, G., Pinkernell, G. & Schacht, F. (Hrsg.): Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht. Festschrift für Hans-Jürgen Elschenbroich (S. 40 – 54). MNU Verlag K. Seeberger, Neuss.

Heintz, G. (2011): Fördern mit Methode(n). Seminar 4/2011, S.48 – 56, Verlag Hohengreben.

Heintz, G., Elschenbroich, H.-J., Laakmann, H., Langlotz, H., Schacht, F. & Schmidt, R. (2014): Digitale Werkzeugkompetenzen im Mathematikunterricht – Vortrag auf dem MNU-Bundeskongress Kassel 2014, in: MNU 67(5), S. 300 – 306.

Heintz, G., Elschenbroich, H.-J., Laakmann, H., Schacht, F. & Schmidt, R. (2014): Digitale Werkzeugkompetenzen im Mathematikunterricht, in: Roth, J. & Ames, J. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2014, Münster: WTM-Verlag, S. 507 – 510.

Huber, H.-D. (2004): Im Dschungel der Kompetenzen. URL: *http://www.hgb-leipzig.de/ARTNINE/huber/aufsaetze/kompetenz.html* [Zugriff am 13.06.2014].

Kultusministerkonferenz (KMK) (2012): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. URL: *http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf* [Zugriff am 09.04.2013]

Kultusministerkonferenz (KMK) (2003): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. URL: *http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf* [Zugriff am 13.06.2014]

Mathematik-Kommission Übergang Schule-Hochschule (2013): Stellungnahme der Mathematik-Kommission Übergang Schule – Hochschule vom 31. Oktober 2013. URL: *http://www.mathematik-schule-hochschule.de/images/Stellungnahmen/pdf/stellungnahme-mathe-kommission-2013-10-31.pdf*. [Zugriff am 4.12.16]

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes NRW (Hrsg.) (2013): Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium / Gesamtschule in NRW. Mathematik. URL: *www.schulministerium.nrw.de*. [Zugriff am 13.06.2014]

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes NRW (Hrsg.) (2007): Kernlehrplan für das Gymnasium – Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein-Westfalen. Mathematik. Frechen: Ritterbach.

Pinkernell, G., Elschenbroich, H.-J., Heintz, G., Körner, H., Langlotz, H., Pallack, A. (2015): Grundlegendes Wissen und Können am Ende der Sekundarstufe II: Zentrale Begriffe und Verfahren beherrschen und verstehen. MNU Themenreihe Bildungsstandards. *http://tinyurl.com/MNU-WuK-SekII.* [Zugriff am 2.12.2016]

Pinkernell, G. & Bruder, R. (2011). CAliMERO (2005-2010): CAS in der Sekundarstufe I - Ergebnisse einer Längsschnittstudie. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, GDM Freiburg, Münster: WTM-Verlag, S. 627 – 630.

Riemer, W. (2012): Lernen aus Erfahrung. Ein „Fünfminuten-Experiment" zum Hypothesentest. In: PM Praxis der Mathematik, Heft 48, S. 25.

Schacht, F. (2014): Dokumentation ≠ Dokumentation. Funktions- und Zielgruppenabhängige Varianten bei Schülerdokumentationen. PM Praxis der Mathematik, 60(56), 34 – 37.

Schacht, F. (2016a): Und wie schreibe ich das jetzt auf? Zur Dokumentation von Fach- und Werkzeugsprache im Mathematikunterricht, In: Heintz, G., Pinkernell, G. & Schacht, F. (Hrsg.): Festschrift ‚Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht' für Hans-Jürgen Elschenbroich. Verlag Seeberger, Neuss. S. 243 – 261.

Schacht, F. (2016b): So schreibe ich das auf! Dokumentationsvarianten am Beispiel von Funktionen. In: Heintz, G., Pinkernell, G. & Schacht, F. (Hrsg.): Festschrift ‚Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht' für Hans-Jürgen Elschenbroich. Verlag Seeberger, Neuss. S. 337 – 340.

Schmidt, R. (2014): Mit linearen Funktionen und Rechtecken zu quadratischen Funktionen. In: PM Praxis der Mathematik in der Schule 60 (56). Aulis Verlag: Hallbergmoos, S. 14.

Schmidt, R. & Riemer, W. (2013): Grafisch ableiten. Eine „Sternstunde" zu Beginn der Analysis. In: PM Praxis der Mathematik in der Schule 55 (50). Aulis Verlag: Hallbergmoos, S. 41 – 42.

Schupp, H. (2016): Gedanken zum „Stoff" und zur „Stoffdidaktik" sowie zu ihrer Bedeutung für die Qualität des Mathematikunterrichts. In: Mathematische Semesterberichte, Band 63, Heft 1. Springer Verlag, Heidelberg. S. 69 – 92.

Weigand, H.G. & Bichler, E. (2010): Towards a Competence Model for the Use of Symbolic Calculators in Mathematics Lessons – The Case of Functions, ZDM -The International Journal on Mathematics Education 42(7), 697 – 713

Weinert, F. E. (2001): Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – Eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In: Weinert, Franz E. (Hg.): Leistungsmessungen in Schulen. Weinheim u. Basel, S. 27 f.

Wesselbaum, A. (2015): Eine empirische Erhebung in einer 7. Klasse eines Gymnasiums zur Nutzung von werkzeugbezogener Fachsprache bei geometrischen Erkundungen mit GeoGebra. Unveröffentlichte Abschlussarbeit. TU Dortmund.

Weller, H. (1996): Das Weizenbierglas. In: mathematik lehren 77. Friedrich Verlag: Seelze, S. 67.

Winter, H. (1996): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik Nr. 61, 3746.

Index

Bildnachweis

Abb. 2a: © *Elschenbroich;* **Abb. 2b:** © *Schacht;* **Abb. 2c:** © *Elschenbroich ;* **Abb. 3.2a – 3.2b:** © *Elschenbroich;* **Abb. 3.2c:** © *Schmidt ;* **Abb. 3.3:** © *Schacht ;* **Abb. 3.2d:** © *Schmidt / Laakmann;* **Abb. 5.1a – 5.1d:** © *Schmidt;* **Abb. 5.2a – 5.2f:** © *Elschenbroich;* **Abb. 5.3a:** © *Elschenbroich;* **Abb. 5.3b:** © *Heintz;* **Abb. 5.4 – 5.4a:** © *Elschenbroich;* **Abb. 5.5a:** © *Heintz;* **Abb. 5.5b:** © *Elschenbroich;* **Abb. 5.6:** *Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hamburg_-_Klassenfoto_ 1951.jpg, Autor: Oxfordian Kissuth;* **Abb. 5.6a – 5.6b:** © *Tietz / Langlotz;* **Abb. 5.7:** *CC0 Public Domain, https://pixabay.com/de/kinder-tv-fernsehen-home-menschen-403582/;* **Abb. 5.7a – 5.7b:** © *Tietz / Langlotz;* **Abb. 5.8 – 5.8e:** © *Tietz / Langlotz;* **Abb. 5.9a:** © *Schmidt / Laakmann;* **Abb. 5.10a – 5.10k:** © *Rüsing;* **Abb. 5.11a:** *Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Oil_well.jpg, Flcelloguy at English Wikipedia, Autor: Flcelloguy at English Wikipedia;* **Abb. 5.11b – 5.11g:** © *Schacht ;* **Abb. 5.12a – 5.12c:** © *Schmidt;* **Abb. 5.13a – 5.13d:** © *Elschenbroich;* **Abb. 5.14 – 5.14k:** © *Rüsing;* **Abb. 5.15 – 5.15a:** © *Schacht;* **Abb. 5.15b – 5.15h:** © *Rüsing;* **Abb. 5.15i – 5.15l:** © *Schacht;* **Abb. 5.16a – 5.16f:** © *Langlotz;* **Abb. 5.17 – 5.17b:** © *Schmidt;* **Abb. 5.18:** © *Elschenbroich;* **Abb. 6.1a – 6.1c:** © *Schacht;* **Abb. 6.2a – 6.2b:** © *Schacht;* **Abb. 6.3a – 6.3b:** © *Schacht;* **Abb. 6.4a – 6.4h:** © *Rüsing;* **Abb. 7.1a:** © *Heintz / Schmidt;* **Abb. 7.2a – 7.2e:** © *Elschenbroich.*

Autoren

Gaby Heintz
Leiterin der MNU-T³-Arbeitsguppe Werkzeugkompetenzen.

Tätigkeiten: Lehrerin, Fachleiterin Mathematik und Kernseminarleiterin am ZfsL Neuss, Moderatorin, Arbeitsgruppe Mathematik bei der Medienberatung NRW, Lehrerfortbildung im Rahmen des DZLM Programms Mathematik Anders Machen (MAM) und Geometrie kompakt.

ehemalige Fachreferentin Öffentlichkeitsarbeit im MNU Bundesvorstand.

Arbeitsgebiete: Digitale Mathematik-Werkzeuge, Kooperatives Lernen, Medienkonzepte Sinus-NRW.

Hans-Jürgen Elschenbroich

Tätigkeiten: Lehrer a. D. für Mathematik und Informatik am Marie-Curie-Gymnasium Neuss, ehem. Fachberater Mathematik bei der Bezirksregierung Düsseldorf, Fachmoderator Lehrerfortbildung bei der Bezirksregierung Düsseldorf, Fachleiter Mathematik am Studienseminar Neuss, Medienberatung NRW.

ehemaliger Fachreferent Mathematik im MNU Bundesvorstand.

Arbeitsgebiete: Digitale Mathematik-Werkzeuge, Medienkonzepte, Lernmittelkonzepte, AG Mathematik bei der Medienberatung NRW, DZLM Fortbildungen Mathematik Anders Machen (MAM) und Geometrie kompakt.

Dr. Heinz Laakmann

Tätigkeit: Lehrer im Hochschuldienst am Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts an der TU Dortmund.

T³ Regionalkoordination, Lehrerfortbildung.

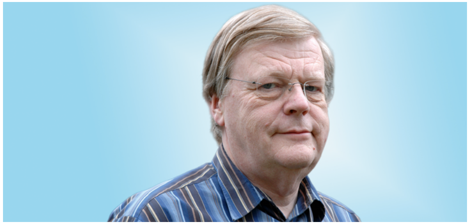
Arbeitsgebiete: Begriffsbildung im Mathematikunterricht, Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht.

Dr. Hubert Langlotz

Tätigkeiten: Lehrer für Mathematik, Physik und Informatik am Elisabeth-Gymnasium Eisenach, dort auch stellv. Schulleiter.

T^3-Länderkoordinator für Thüringen und Mitglied im Leitungsteam von T^3.

Arbeitsgebiete: Fortbildner für T^3, DZLM, Schwerpunkt Stochastik.



Michael Rüsing

Tätigkeiten: Lehrer für Mathematik, Physik und Informatik am B. M. V. – Gymnasium in Essen.

Koordinator bei Sinus-NRW, Kompetenzteam Essen

MNU journal Herausgeber Mathematik

Arbeitsgebiete: CAS/GTR, Mathematik Olympiade, Mathematik-Wettbewerbe.

Prof. Dr. Florian Schacht

Tätigkeiten: Didaktik der Mathematik (Fakultät für Mathematik an der Universität Duisburg-Essen), Lehrer für Mathematik und Musik an Gymnasien.

Arbeitsgebiete: Digitale Mathematik-Werkzeuge, Begriffsbildung im Mathematikunterricht, Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht.

Reinhard Schmidt

Tätigkeiten: Fachleiter für Mathematik, Kernseminarleiter, Leiter des Seminars GyGe am ZfsL Euskirchen, Direktor des GeoGebra-Instituts Köln Bonn, Administrator im ZUM-Wiki.

Fachreferent für Mathematik des MNU-Landesverbandes Nordrhein.

Arbeitsgebiete: Digitale Mathematik-Werkzeuge (insb. GeoGebra), interaktive Lernpfade, Mathematik-Olympiade, Rehabilitation der Geometrie in der Schulmathematik.

Dr. Carsten Tietz

Tätigkeiten: Lehrer für Mathematik/Physik / Informatik am Nelly-Sachs-Gymnasium, Neuss, Leiter der Arbeitsgruppe Mathematik bei der Medienberatung NRW, Lehrerfortbildung im Rahmen des DZLM Programms GTR kompakt.

ehemaliger stellvertretender Fachreferent Öffentlichkeitsarbeit im MNU Bundesvorstand.

Arbeitsgebiete: Digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht, DZLM Fortbildung GTR kompakt, Begabtenförderung.

HEINTZ, G.; PINKERNELL, G.; SCHACHT, F. (HRSG.)

Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht

Festschrift für HANS-JÜRGEN ELSCHENBROICH

Heintz, G.; Pinkernell, G.; Schacht, F. (Hrsg.):

Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht

DAS aktuelle Buch zum Einsatz neuer Technologien im Mathematikunterricht!
27 Beiträge von renommierten Autoren aus Hochschule und Schule, aus Forschung und Praxis.

Die Beiträge gliedern sich in vier Kapitel:

- Aus der Schule, für die Schule
- Fachdidaktische Beiträge
- Fachmathematische Beiträge
- Praxisbeiträge.

368 Seiten, Format A5 mehrfarbig,
mit digitalen Ergänzungen online.

ISBN 978-3-940516-20-6. € 33,00

Leseprobe: *http://www.mnu.de/images/publikationen/Mathematik/Leseprobe_Festschrift_Elschenbroich_2016.pdf*

Für MNU-Mitglieder bei Online-Bestellung: € 28,00
www.mnu.de/bestellung-festschrift

Bibliothekslizenz (PDF): € 198,00
ISBN 978-3-940516-24-4.

Bei Bestellung bis 31.5.2017 € 133,00
info@seeberger-verlag.de