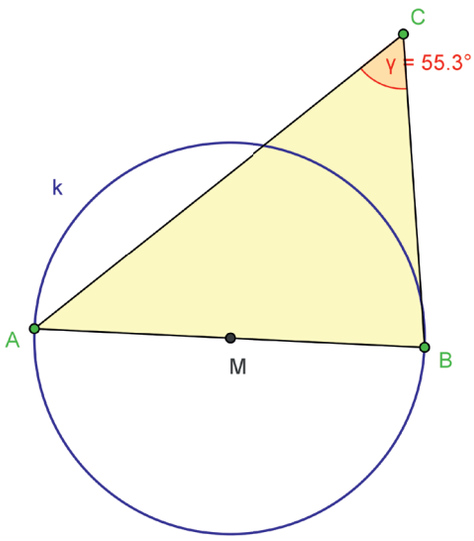
Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt
Satz des Thales

5.2 Satz des Thales

Jahrgangsstufe 7 – 8

Der Satz des Thales ist einer der wesentlichen Sätze der Schulgeometrie (neben dem Innenwinkelsummensatz und dem Satz des Pythagoras) und eine der ersten Stellen, wo Schülerinnen und Schüler einen Beweis kennenlernen können.

Dynamische Geometrie-Software hilft dabei, dass das kein lehrerzentrierter Exerzierplatz des Beweisens wird, sondern dass Schülerinnen und Schüler selbstständig die Sachverhalte rund um den Satz des Thales entdecken und begründen können.



Die Arbeitsblätter beginnen mit einem handlungsorientierten Zugang auf dem Schulhof. Danach gibt es eine Folge von dynamischen Arbeitsblättern, die sukzessive von den Phänomenen zum Satz und zum Umkehrsatz führt.

Die Schülerinnen und Schüler entdecken durch systematische Variation den Zusammenhang zwischen der Gestalt des Dreiecks ABC und dem Winkel γ und formulieren ihn präzise (Satzfindung). Mit einem passenden Arbeitsblatt können sie dann auch den Beweis für Satz und Umkehrsatz entdecken und erarbeiten.

Aufgabe 1: Auf dem Schulhof

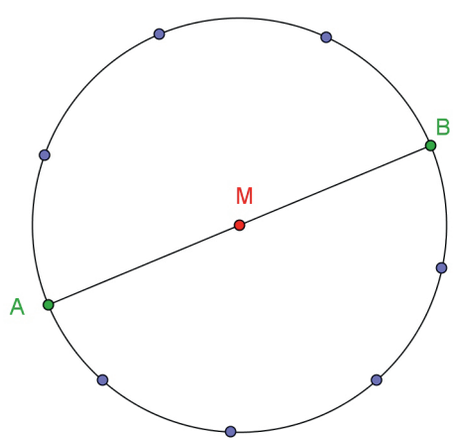


Abbildung 5.2a

Stellt euch folgendermaßen auf:

- Bildet einen Kreis.
- Ein Schüler M stellt sich in die Mitte.

Zwei Schüler A und B werden dann so ausgewählt, dass ihre Verbindung einen Durchmesser bildet, d. h. dass M der Mittelpunkt der Strecke AB ist.

Sie bekommen z. B. eine Stange zur Markierung in die Hand.

- Stellt dann eure Füße so, dass ein Fuß auf A und einer auf B zeigt.
- Welchen Winkel bilden eure Füße?

Jetzt bekommen zwei andere Schüler die Rolle von A und B.

- Stellt eure Füße wieder so, dass ein Fuß auf A und einer auf B zeigt.
- Welchen Winkel bilden eure Füße?

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Kopiervorlage – Schülerarbeitsblatt
Satz des Thales

VORLIEGENDE DATEIEN

AUFGABE 2

5-2b1_thales.ggb
www.geogebra.org/m/VcjPCqek

5-2b1_thales.tns
www.mnu.de/weko/5-2b1_thales.tns

AUFGABE 3

5-2c_thales.ggb
www.geogebra.org/m/uQKpb7Qd

5-2c_thales.tns
www.mnu.de/weko/5-2c_thales.tns

VORLIEGENDE DATEIEN

AUFGABE 4

5-2d1_thales.ggb
www.geogebra.org/m/bUxKcuxK

5-2d_thales.tns
www.mnu.de/weko/5-2d_thales.tns

AUFGABE 5

5-2e_thales.ggb
www.geogebra.org/m/mu3X6tWN

5-2e_thales.tns
www.mnu.de/weko/5-2e_thales.tns

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Aufgabe 2: Ausprobieren

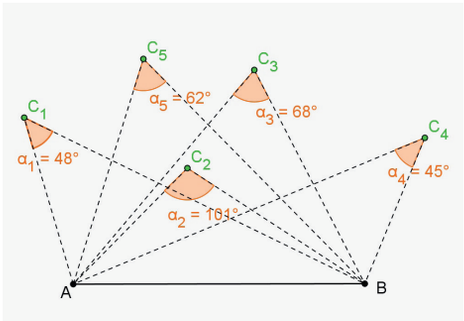


Abbildung 5.2b

Ziehe an den Punkten C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 so, dass die Winkel jeweils gleich 90° sind.

Auf welcher Linie liegen die Punkte dann vermutlich?

Aufgabe 3: Variationen an Dreiecken

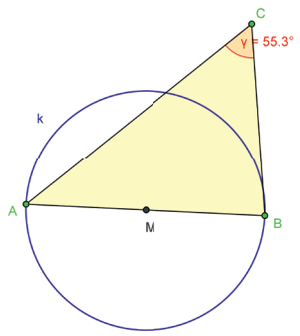


Abbildung 5.2c

Es sind ein Dreieck ABC und der Kreis mit dem Durchmesser AB gegeben. Ziehe an C.

1. Was stellst du für γ fest, wenn C innerhalb des Kreises liegt?
2. Was stellst du für γ fest, wenn C außerhalb des Kreises liegt?
3. Binde C an den Kreis. Was stellst du nun für γ fest?

Aufgabe 4: Dem Thales auf der Spur

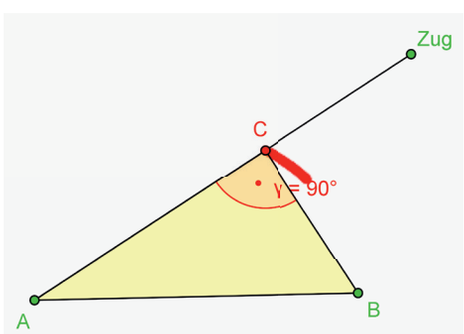


Abbildung 5.2d

Es ist ein rechtwinkliges Dreieck (γ = 90°) gegeben. Verändere die Gestalt des Dreiecks durch Ziehen am Punkt „Zug".

1. Auf welcher Linie bewegt sich dann der Punkt C?
2. Lasse C eine Spur / eine Ortslinie zeichnen.

Aufgabe 5: Thales auf den Grund gehen

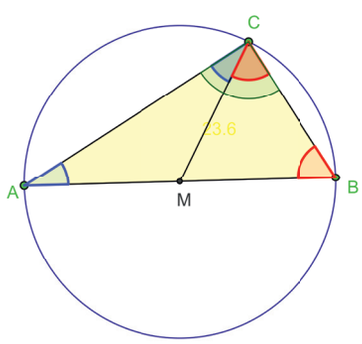


Abbildung 5.2e

Es ist ein Dreieck ABC mit dem Thaleskreis über AB gegeben. Ziehe an C und achte auf die Winkel.

1. Was fällt dir bei den gleichfarbig markierten Winkeln auf?
2. Wie groß sind alle markierten Winkel zusammen?
3. Was folgt daraus für die Größe des Winkels γ bei C?

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer
Satz des Thales

VORKENNTNISSE

Die Schülerinnen und Schüler sollten über folgende Kenntnisse verfügen:

- ***Winkelbegriff (spitze, rechte, stumpfe Winkel), Basiswinkel in gleichschenkligen Dreiecken, Winkelsumme im Dreieck.***

VORLIEGENDE DATEIEN

5-2b2_thales.ggb
www.geogebra.org/m/eqGf29bh

5-2b2_thales.tns
www.mnu.de/weko/5-2b2_thales.tns

5-2d2_thales.ggb
www.geogebra.org/m/SFQWvYB5

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz

Hinweise zur Lösung

Wesentliche Erkenntnisse bei der Lösung der Aufgabe sind:

Zu 1:
Die Schülerinnen und Schüler entdecken, dass ihre Füße einen Winkel von (ungefähr) 90° bilden.

Zu 2:
Die Schülerinnen und Schüler entdecken, dass die Punkte C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 vermutlich auf einem Kreis liegen.

Zu 3:
Die Schülerinnen und Schüler entdecken, dass

- γ spitzwinklig ist, wenn C außerhalb des Kreises liegt
- γ stumpfwinklig ist, wenn C innerhalb des Kreises liegt
- γ rechtwinklig ist, wenn C auf dem Kreises liegt.

Zu 4:
Die Schülerinnen und Schüler entdecken, dass die Spur / Ortslinie des Punktes C mit rechtem Winkel γ eine Kreislinie (mit AB als Durchmesser) ist.

Hinweis: *Hier geht der Thaleskreis nicht heimlich in die Konstruktion mit ein! Sonst wäre es auch keine echte Erkenntnis, dass sich der Eckpunkt C auf einer Kreislinie bewegen würde, wenn er auf einer solchen konstruiert worden ist. In dieser Datei wird der rechte Winkel mit einer Senkrechten erzeugt.*

Zu 5:
Die Schülerinnen und Schüler beweisen den Satz des Thales, indem sie das Dreieck ABC in gleichschenklige Teildreiecke aufteilen und darin die Winkelsätze in Dreiecken anwenden.

Mögliche Alternative zu den Aufgabenstellungen 2 und 3:

Es wird nicht mit einem dynamischen Arbeitsblatt begonnen, sondern die Schülerinnen und Schüler konstruieren vom leeren Bildschirm aus die entsprechenden Dateien selber.

Mögliche Alternative zur Aufgabenstellung 2:

1. Ziehe an C so, dass der Winkel immer möglichst gleich 90° ist.
2. Lasse C dabei eine Spur zeichnen.

Mögliche Alternative zur Aufgabe 4:

In jedem Fall sollte der rechte Winkel durch eine Senkrechte erzeugt werden und nicht durch einen versteckten Thaleskreis. Um eine Dynamisierung zu erzielen, kann man entweder wie in 5-2d_thales einen Zugpunkt außerhalb des Dreiecks einsetzen oder einen Winkel über einen Schieberegler variieren.

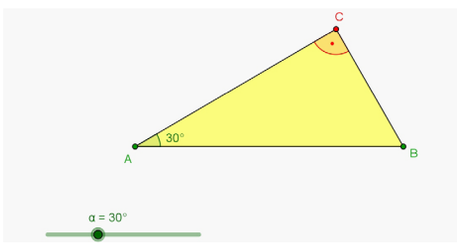


Abbildung 5.2f

MEHRWERT

Wir haben hier einen schüleraktiven präformalen Zugang zum Satz des Thales.

Dynamische Geometrie-Software verhindert die Beschränkung auf rechtwinklige Dreiecke und weitet den Blick auf spitzwinklige und stumpfwinklige Dreiecke und macht dadurch die besondere Rolle des rechten Winkels erst deutlich.

Die Problemlösekompetenz wird gefördert durch:

- systematisches Variieren (dabei Entdecken von drei typischen Fällen)
- Anwenden der Problemlösestrategie „Einzeichnen von Hilfslinien".

Die Kommunikationskompetenz wird gefördert durch:

- Beschreibung mathematischer Sachverhalte in eigenen Worten
- ggf. Formulierung des Beweises.

Kopiervorlage – Hinweise für Lehrer
Satz des Thales

Hinweise zur Lösung

WERKZEUGKOMPETENZ

Bedienkompetenz:

Die Lernenden müssen den Zugmodus beherrschen und Spur/ Ortslinie anwenden.

Bei den Alternativen zu Aufgabe 2 und 3 müssen die Schülerinnen und Schüler Dreiecke, Kreis, Mittelpunkt und Winkel konstruieren können und Winkel messen.

Bei der Alternative zu Aufgabe 4 müssen die Schülerinnen und Schüler mit Schiebereglern umgehen und Winkel antragen können.

Reflexionskompetenz:

Die Lernenden nutzen das digitale Werkzeug hier auf zweierlei Arten, die sie reflektieren sollten. Einerseits ermöglicht die Nutzung des digitalen Werkzeugs die Genese von Hypothesen, inwiefern der Winkel γ mit dem Kreis durch die Punkte A und B zusammenhängt. Gleichzeitig nutzen die Schülerinnen und Schüler das Werkzeug in Aufgabe 5 als heuristisches Hilfsmittel zum Beweis des Satzes des Thales. Die Reflexion dieser beiden unterschiedlichen mathematischen Tätigkeiten (Hypothesen generieren und beweisen) sollte in einem werkzeugsensiblen Unterricht Gegenstand der Diskussion sein.

Dokumentationskompetenz:

Das Generieren von Hypothesen mit Hilfe des digitalen Werkzeugs verläuft im Unterricht in der Regel sehr intuitiv. Vielen Lernenden fällt es dagegen schwer, die Hypothesen in einer sprachlich angemessenen Form darzustellen. Unterstützende Satzfragmente zum Aufstellen der Hypothesen können hier helfen, wie etwa:

- Der Winkel ist ..., wenn C innerhalb des Kreises liegt.
- Wenn die Punkte C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 ..., dann

Gerade bei geometrischen Beweisen ist es für Schülerinnen und Schüler eine große Herausforderung, genau zu formulieren, was zu beweisen ist. Im Unterricht kann eine deutliche Strukturierung des Beweises daher helfen, etwa indem zunächst angegeben wird, was gezeigt werden muss. Bei den hier vorliegenden Aufgaben nutzen die Lernenden eine eher präformale Sprache.

Unterschiedliche Dokumentationen des Beweises können im Unterricht eingesammelt werden, um sie dann mit den Schülerinnen und Schülern zu vergleichen und deutlich hervorzuheben, welche Ausführungen etwa die Bedienung des Werkzeugs betreffen und welche das mathematische Argument. So kann im Unterricht thematisiert werden, dass es gerade in Entdeckungssituationen wichtig sein kann, Teilschritte des Bearbeitungsprozesses in Explorationsschritten explizit zu dokumentieren, während in Klausursituationen die mathematische Argumentation im Vordergrund stehen sollte.

LITERATUR

Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. (2011): Geometrie entdecken!, Teil 2. co.Tec Verlag

Arbeitsgruppe Werkzeugkompetenzen:
Gaby Heintz, Hans-Jürgen Elschenbroich, Heinz Laakmann, Hubert Langlotz, Michael Rüsing, Florian Schacht, Reinhard Schmidt, Carsten Tietz