

Ich föhne mir echte Zufallszahlen



Erzeugung von Zufallszahlenfolgen aus akustischen Rauschexperimenten

KIM-ALESSANDRO WEBER – GUNNAR FRIEGE – RÜDIGER SCHOLZ

Online-Ergänzung

Der Föhn im Rauschlabor – Frequenzcharakteristik

Das Geräusch eines gewöhnlichen Haarföhns wird mit dem Mikrophon aufgenommen und mit einem Speicheroszilloskop analysiert. Das Verwenden des Speicheroszilloskops ermöglicht hier eine detailliertere Analyse, als es mit der Soundkarte möglich wäre (höhere Abtastrate). Für die spätere Erzeugung der Zufallszahlen ist das Speicheroszilloskop nicht erforderlich.

Abbildung 1 zeigt die Frequenzcharakteristik eines weißen Rauschens, Abbildung 2 die des aufgenommenen Signals. In der Frequenzcharakteristik ist kein Plateau zu erkennen, wie es in Abbildung 1 der Fall ist, dennoch lassen sich auch hier

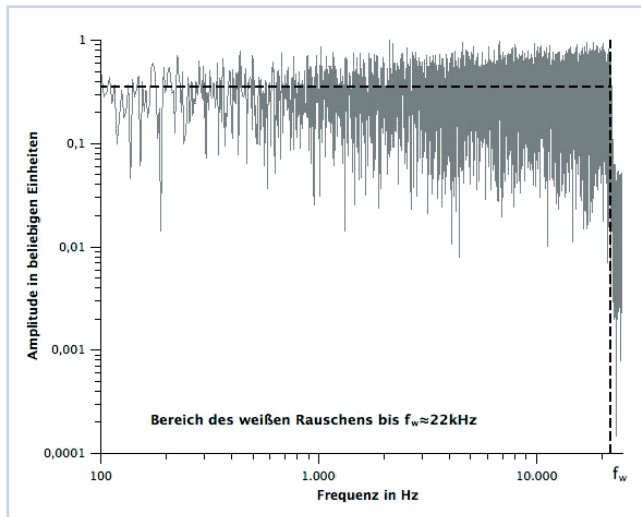


Abb. 1. Ideales akustisches Rauschen

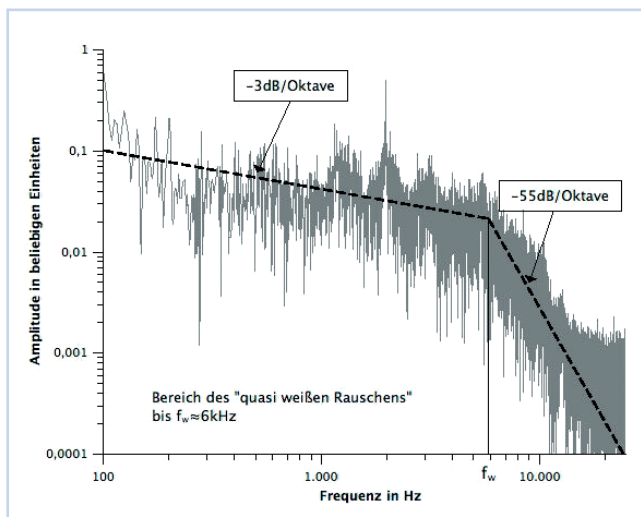


Abb. 2. Rauschen des Föhns

zwei Bereiche feststellen. Im ersten Bereich fällt die Amplitude (-3 dB pro Oktave) mit zunehmender Frequenz geringer ab als im zweiten sich anschließenden Teil (-55 dB pro Oktave).

Eine Abschwächung der Amplituden bei zunehmender Frequenz bedeutet, dass sich das Signal bei kleineren Abtastintervallen nur gering ändert. Bei einer zu hoch gewählten Abtastrate korrelieren somit aufeinanderfolgende Abtastwerte. Würde man beispielsweise ein Roulett mit derartigen Zahlen simulieren, würde der findige Spieler auf das Kreissegment setzen, in welches die Kugel zuvor gefallen ist und hätte somit eine größere Gewinnchance.

Wie klein muss die Abtastrate gewählt werden, damit aufeinanderfolgende Zufallszahlen nicht korreliert und somit zufällig sind?

Die starke Abschwächung von Frequenzen größer als 6 kHz bedeutet, dass sich das Signal in Zeitintervallen, die kleiner sind als

$$\frac{1}{6 \text{ kHz}} = \frac{1}{6} \text{ ms},$$

gering ändert. Dies ist eine Abschätzung der maximalen Abtastfrequenz $f_{\text{Abtast}} = 6 \text{ kHz}$, mit der Zufallszahlen generiert werden können. Um die maximale Samplefrequenz genau zu bestimmen, soll das Signal mit der normierten Autokorrelationsfunktion betrachtet werden.

Mittels der normierten Autokorrelationsfunktion

$$\Psi_{xx}(\tau) = \frac{1}{C} \sum_n x_n \cdot x_{n-\tau}$$

mit

$$C = \sum_n x_n^2$$

können die Korrelationen eines Signals x_n zu demselben, um τ diskrete Zeitschritte verschobenem Signal $x_{n-\tau}$ analysiert werden. Die Autokorrelation nimmt einen maximalen Wert von 1 an, wenn das Signal x_n und das verschobene Signal $x_{n-\tau}$ für alle n identisch sind. Der Wert -1 wird angenommen, wenn x_n und $x_{n-\tau}$ antikorreliert sind. Ein nicht periodisches Signal nimmt daher den Wert von 1 lediglich für $\tau = 0$ an, so auch bei dem idealen weißen Rauschen und dem Föhnrauschen.

In Abbildung 3 sind die Autokorrelationsfunktion des Föhns und die des idealen weißen Rauschens gegenübergestellt. Beide Autokorrelationen fallen für $\tau > 0$ steil ab. Die Autokorrelation des künstlichen, weißen Rauschens nimmt den Wert Null an. Die Autokorrelationsfunktion des Föhns hingegen zeigt schwache Korrelationen mit einer Periodizität von 100 Hz und etwa 1800 Hz. Die Frequenz von 100 Hz entsteht durch die Netzfrequenz. Die 1800 Hz ergeben sich durch die Bauart des Föhns und sind abhängig von der Motordrehzahl. Ob der fin-

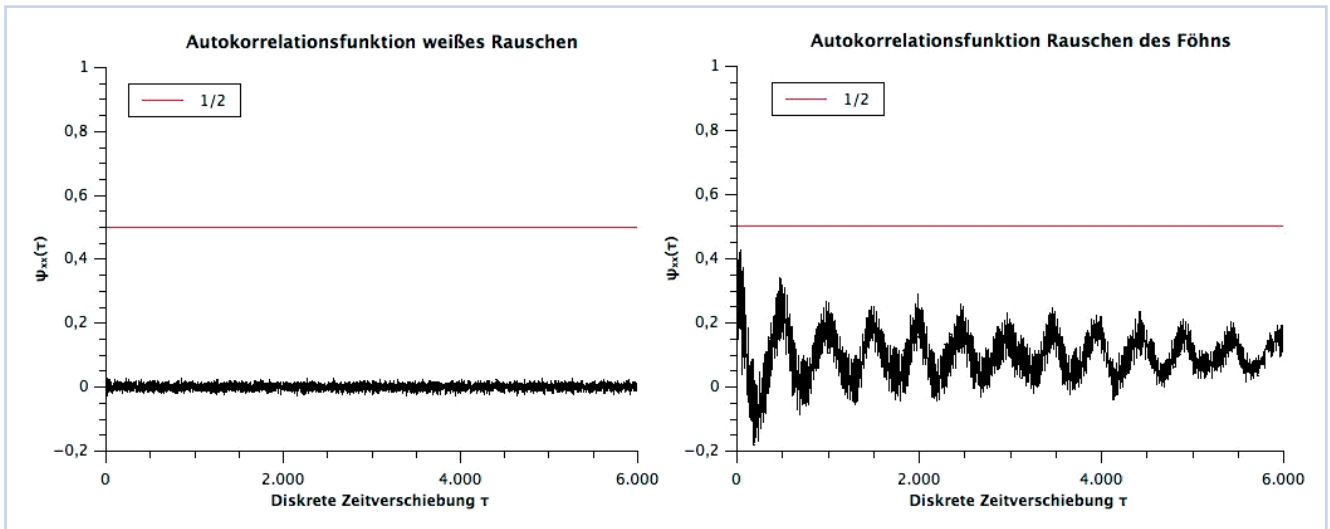


Abb. 3. Vergleich der Autokorrelationsfunktion des weißen Rauschens und des Rauschens eines Föhns

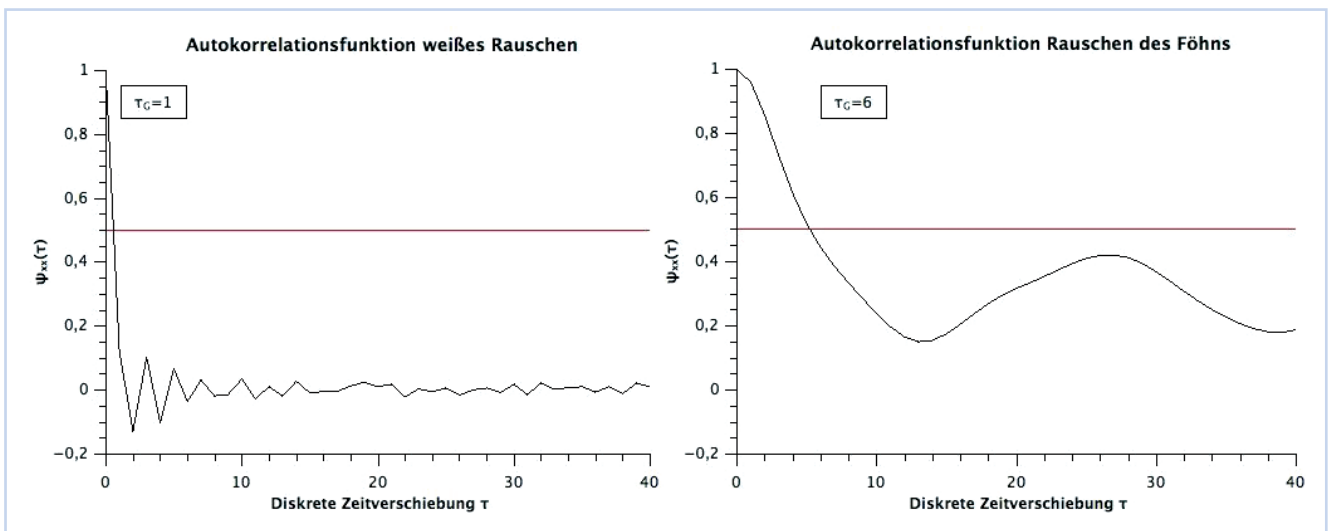


Abb. 4. Autokorrelationsfunktion für kleine Zeitverschiebungen

dige Spieler das ausnutzen kann, wird mittels der Zufallszahlentests im Abschnitt 3 des Grundartikels analysiert.

Nimmt die Autokorrelationsfunktion den Wert $\frac{1}{2}$ an, so bedeutet dies, die korrelierten Anteile im Signal haben um die Hälfte abgenommen. Dieser Wert wird hier als der Schwellwert gesetzt, ab dem Zufallszahlen generiert werden können. Die Stelle τ_G , an der dieser Wert angenommen wird, ermöglicht so die Bestimmung der maximalen Abtastfrequenz

$$f_{\text{Abtast,max}} = \frac{f_{\text{Abtast}}}{\tau_G},$$

mit der die Zufallszahlen erzeugt werden können.

In Abbildung 4 ist der Bereich von $\tau = 0$ bis $\tau = 40$ dargestellt.

Wie zu erwarten, fällt die Autokorrelation des künstlich erzeugten, weißen Rauschens schneller ab als die des Föhnrauschens, da im Föhnrauschen die großen Frequenzen (über 6 kHz) stark gedämpft werden. Für das Rauschen des Föhns kann so $\tau_G = 6$ bestimmt werden.

Indem jedes τ_G -te Sample genutzt wird, kann die Samplerate reduziert werden, sodass aufeinanderfolgende Werte nicht korrelieren. Es ergibt sich eine maximale Samplefrequenz von 7 kHz.

Die Autokorrelation des weißen Rauschens nimmt bereits bei Verschiebung um einen Zeitschritt ($k = \pm 1$) den Wert $\frac{1}{2}$ an. Die maximale Samplerate kann genutzt werden. ■ □