

Mathematische Begabung und ihre Förderung im Unterricht

Volker Ulm

Universität Augsburg, Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik, 86135 Augsburg

Kurzfassung

Der Artikel stellt heraus, dass die Förderung besonders begabter Schülerinnen und Schüler ein zentrales Anliegen des Bildungswesens sein sollte und dass in diesem Bereich aktuell wesentliche Handlungsfelder und Handlungsnotwendigkeiten bestehen. Das Phänomen der Begabung wird aus dem Blickwinkel der Psychologie sowie mit speziellem Bezug zum Fach Mathematik beleuchtet. Dazu wird ein Modell für spezifisch mathematische Begabung entworfen. Die Frage nach der Förderung mathematisch Begabter im regulären Unterricht des Schulalltags führt zu Konzepten der Unterrichtsmethodik und der inhaltlichen Gestaltung von Mathematikaufgaben. Zudem werden Förderangebote, die sich exklusiv an besonders Begabte richten – Enrichment-Programme und Begabtgymnasien –, sowie einhergehende Entwicklungen des Bildungswesens kritisch diskutiert.

1. Begabte fördern: Warum dieses Thema?

„Schüler fördern“ ist ein hochaktuelles Thema – auch in der Politik und den Medien. Wenn in den letzten Jahren – gerade im Nachklang von PISA – in der politischen und öffentlichen Diskussion von „Diagnose und Förderung“ die Rede war, dann hatte man dabei allerdings vor allem die Diagnose und Förderung leistungsschwächerer Schüler im Blickfeld. Das ist allerdings nur eine Seite der Medaille. Der Deutsche Philologenverband hat darauf in einer Presseerklärung hingewiesen:

„Deutschland tut zu wenig für seine besonders begabten und hochbegabten Schülerinnen und Schüler. [...] Zu Recht haben die Anstrengungen in den letzten Jahren vor allem der zu großen Gruppe von Risikoschülern gegolten, die bei den internationalen Tests nicht einmal die Kompetenzstufe 1 erreicht haben. [...] Für die zu besonderen Leistungen fähigen Spitzenschüler gibt es bisher zu geringe spezielle Förderung, zu wenig Pluskurse und Zusatzangebote. Das Bekenntnis zur individuellen Förderung muss aber diese Schülergruppe mit einschließen und darf sich nicht auf Angebote für schwächere Lernende beschränken!“ [17]

Das Thema „Begabte fördern“ sollte ein ganz zentrales Thema unseres Schulsystems sein, denn das Schulsystem ist ja auch dafür da, die begabtesten unserer Schüler adäquat zu fördern. Allerdings hat sich das Schulsystem in den letzten Jahren durch politische und gesellschaftliche Wünsche substantiell verändert und es wird sich auch in Zukunft weiter verändern. Deshalb müssen wir uns fragen: Werden wir unserem Bildungsauftrag eigentlich noch gerecht? Sind die Methoden, die wir bislang praktizieren, in veränderten schulischen Situationen immer noch optimal? Wie können wir den Bildungsauftrag der Schule wirkungsvoll umsetzen – insbesondere auch für die Begabtesten unter den Schülern?

2. Modelle für Begabung

Die Frage „Was ist Begabung?“ wird insbesondere in der Begabungspsychologie durchaus kontrovers diskutiert. Eine universelle Definition für „Begabung“ gibt es nicht. Es kann sie prinzipiell auch nicht geben, da die Vorstellungen, was als Begabung anzusehen ist, immer von gesellschaftlichen, kulturellen und historischen Kontexten abhängen (vgl. [1]). Kategorisierungen verschiedener Begabungsdefinitionen sind beispielsweise in [1] und [9] zusammengestellt.

Im Folgenden werden zwei sehr unterschiedliche Konzeptualisierungen von Begabung aus der Psychologie vorgestellt, in einem dritten Modell werden anschließend speziell Facetten mathematischer Begabung differenzierter betrachtet.

2.1 Der Intelligenzquotient IQ

Das Konzept des Intelligenzquotienten ist weit verbreitet, insbesondere in der Begabungsdiagnostik. Es führt zu einer einfachen Definition:

Begabung := Intelligenz

:= das, was Intelligenztests mit dem IQ messen
Intelligenztests ordnen Menschen einen Intelligenzquotienten IQ zu. (Dazu gleich mehr.) Diese Zahl misst die Größe Intelligenz; besondere Begabung ist damit das Vorhandensein besonders hoher Intelligenz.

Diese Definition wird beispielsweise genutzt, wenn es um die Frage geht, ob ein Schüler eine Hochbegabtenklasse an einem Gymnasium besuchen darf. Allerdings ist durchaus jedes der beiden Definitionszeichen diskussionswürdig. Das erste Definitionszeichen schließt etwa handwerkliche Begabung weitgehend aus. Das zweite Definitionszeichen steht etwa in Widerspruch zu der in 2.2 vorgestellten psychologischen Theorie, die Intelligenz als multidimensionales Konstrukt auffasst und damit bezweifelt, dass man Intelligenz mit einer einzigen Zahl

messen kann. Aber bleiben wir zunächst noch bei der weit verbreiteten Definition von Begabung über den IQ. In einer Definition ist man ja grundsätzlich frei. Man sollte nur sagen, was man unter den verwendeten Begriffen versteht.

Es bleibt die Frage, wie mit dem IQ festgestellt und quantifiziert wird, wann jemand hochbegabt ist. Dazu gibt es viele verschiedene Intelligenztests – je nach psychologischer Basistheorie. Aus der Art und Weise, wie ein Proband eine Reihe von Testaufgaben bearbeitet, wird jeweils eine Zahl, der IQ berechnet. Der IQ setzt die individuelle Leistung mit dem Erwartungswert innerhalb der Gruppe Gleichaltriger in Beziehung. Es werden also etwa 10-Jährige mit der Gruppe aller 10-Jährigen verglichen, aber nicht mit 18-Jährigen.

Der IQ ist normalverteilt und so skaliert, dass sein Erwartungswert bei 100 liegt und seine Standardabweichung 15 ist.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad \mu = 100, \sigma = 15$$

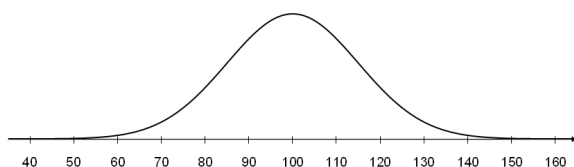


Abb. 1: Normalverteilung des IQ

Mit dem IQ kann man quantifizieren, was Begabung oder Hochbegabung ist. Hochbegabung wird gemeinhin so definiert, dass der individuelle IQ mindestens zwei Standardabweichungen über dem Erwartungswert liegt. Mit dem Erwartungswert 100 und der Standardabweichung 15 bedeutet dies also, dass der $IQ \geq 130$ ist. Aufgrund der Form der Normalverteilung, ist dies bei 2% der Bevölkerung der Fall.

$$IQ - \mu \geq 2\sigma \Leftrightarrow IQ \geq 130$$

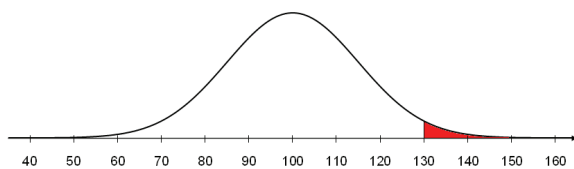


Abb. 2: Definition von Hochbegabung

Die Grenzziehung bei zwei Standardabweichungen bzw. bei 130 ist relativ willkürlich. Als Folge ergibt sich der Anteil von 2% der Hochbegabten an der Gesamtpopulation. Es hat also wenig Sinn, darüber zu streiten, ob 1, 2 oder 5% der Bevölkerung hochbegabt sind. Dies ist nur eine Konventionsfrage – je nachdem, wo man den Schwanz der Normalverteilung abschneidet.

Diese nüchterne Definition soll nun mit etwas Substanz gefüllt werden. Man hat das Gefühl: IQ über 130, 2% der Bevölkerung – dies sind nur sehr wenige Menschen, vielleicht vergleichbar mit Bundessiegern beim Bundeswettbewerb Mathematik oder bei Jugend forscht. Aber diese Vorstellung ist falsch! 2% sind absolut gesehen sehr viele Personen! Machen wir dazu eine Abschätzung:

- Deutschland hat etwa 80 Millionen Einwohner. 2% sind 1,6 Millionen Menschen! In Deutschland haben also 1,6 Millionen Personen einen $IQ \geq 130$ (aufgrund der Form der Normalverteilung).
- Wenn man davon ausgeht, dass ein Begabter etwa ein Sechstel seines Lebens in der Schule verbringt, besitzen etwa eine Viertelmillion Schüler in Deutschland einen $IQ \geq 130$.

Diese Abschätzung wird noch fassbarer, wenn wir sie auf eine konkrete Schule beziehen:

- 2% eines Jahrgangs sind hochbegabt im Sinne obiger Definition. Nehmen wir an, dass im Schnitt gut ein Drittel eines Jahrgangs das Gymnasium besucht und die Hochbegabten zum größten Teil als gymnasialtauglich erkannt werden. (Diese Annahme ist durchaus gerechtfertigt, auch wenn es erschreckende Einzelschicksale von Underachievern gibt.) Damit sind etwa 4% - 5% der Gymnasiasten hochbegabt.
- In einem Gymnasium mit 1200 Schülern besitzen also etwa 50 - 60 Schüler mit einem $IQ \geq 130$.

Wir reden somit nicht über eine verschwindend kleine Randgruppe: Es ist eine durchaus nennenswerte Anzahl von Schülern, die in dem in Abb. 2 markierten 2%-Schwanz der Gauß-Glocke liegen! Diese Schüler zu fördern, ist ein Auftrag des Bildungswesens.

2.2 Die Theorie der multiplen Intelligenzen

In den 1980er Jahren brachte der amerikanische Psychologe Howard Gardner Bewegung in die Diskussion um Intelligenz, u. a. mit dem Buch „Abschied vom IQ“ [8]. Er entwickelte eine Theorie, die Intelligenz als neundimensionales Konstrukt auffasst. Daraus folgert der Autor, dass man Intelligenz nicht sinnvoll mit einer einzigen Zahl messen kann. Diese Theorie bildet einen brauchbaren Hintergrund, wenn man sich mit begabten Schülern befasst.

Gardner identifiziert durch die Arbeit mit Hochbegabten, aber auch mit Schlaganfallpatienten, insgesamt neun Intelligenzen:

- *Sprachliche Intelligenz*: drückt sich durch eine besondere Sensibilität für Sprache und den Umgang mit Sprache aus. Dichter, Schriftsteller und Sprachwissenschaftler verfügen über diese Intelligenz in besonderem Maße.

- *Logisch-abstrakte Intelligenz*: zeigt sich darin, dass man mit abstrakten Objekten gefühlvoll und gleichzeitig logisch-schlussfolgernd umgehen kann sowie in abstrakten Situationen zugrunde liegende Muster und Strukturen erkennt.
- *Räumliche Intelligenz*: bezieht sich auf die Fähigkeit, den Raum genau wahrzunehmen, Raum Erfahrungen zu transformieren (etwa gesehene Objekte zweidimensional zu zeichnen) oder auch sich räumliche Situationen in Gedanken vorstellen zu können. Architekten müssen hierüber in besonderem Maße verfügen.

Intelligenztests messen vor allem diese drei Intelligenzen. Gardner geht aber noch deutlich weiter:

- *Musikalische Intelligenz*: drückt sich etwa in der Fähigkeit aus, Musik zu komponieren, zu verstehen oder aufzuführen. Komponisten, Dirigenten, Berufsmusiker verfügen hierüber in besonderem Maße.
- *Körperlich-kinästhetische Intelligenz*: zeigt sich in der Kontrolle und Koordination von Körperbewegungen und dem geschickten Umgang mit Gegenständen. Tänzer, Sportler, Schauspieler, Pantomimen können dies besonders gut.
- *Interpersonale Intelligenz*: bezieht sich auf die Fähigkeit, Stimmungen und Gefühlszustände bei einem anderen Menschen genau zu erfassen und entsprechend darauf zu reagieren. Psychologen und Psychiater sollten diese Fähigkeit in besonderem Maße besitzen.
- *Intrapersonale Intelligenz*: charakterisiert die Fähigkeit, Stimmungen und Gefühle bei sich selbst bewusst wahrnehmen zu können, in sich „hineinhorchen“ zu können und entsprechend zu reagieren.
- *Naturalistische Intelligenz*: bezieht sich auf die Fähigkeit, Phänomene in der Natur zu erkennen, zu ordnen, zu beschreiben. Forschende Naturwissenschaftler sollten dies insbesondere gut können.
- *existentielle Intelligenz*: zeigt sich in der Fähigkeit, grundlegende Fragen des Seins, der Existenz geistig zu durchdringen. Philosophen, Theologen und geistige Führer sollten hierüber in besonderem Maße verfügen.

Intelligenz ist also ein komplexes, multidimensionales Konstrukt. Für konkrete Handlungsentscheidungen in der Schule kann dieses Konzept durchaus mehr Hilfe bieten als der IQ als eine einzige Zahl, da mit Gardners Theorie die Fähigkeiten bzw. auch die Defizite von Schülern differenzierter modelliert werden.

Allerdings werden Gardners Ansichten wiederum von vielen anderen Begabungsforschern verteuftelt, die behaupten, Gardners Dimensionen seien gar nicht unabhängig voneinander, es gebe so etwas wie eine „allgemeine Intelligenz“ – „general intelligence“ –, die doch auf einer eindimensionalen Skala messbar sei. Diese diskrepanten Ansichten sollen

hier gar nicht gewertet werden, sie werden nur als gängige Theorien der Psychologie nebeneinander gestellt.

2.3 Augsburgs Modell für mathematische Begabung

Wenn man konkret an Mathematikunterricht und mathematische Begabung denkt, erscheinen die in 2.1. und 2.2 skizzierten Theorien aus der Psychologie als etwas grob und undifferenziert. Mathematische Begabung wird einfach pauschal mit „logisch-abstrakter Intelligenz“ und „räumlicher Intelligenz“ bezeichnet. Deshalb als drittes ein differenzierteres Modell mathematischer Begabung. Es dient an der Universität Augsburg als theoretische Grundlage für mehrere Projekte, bei denen sich begabte Schüler mit Mathematik beschäftigen (Knobelkurse an der Universität, Pluskurse an Schulen). Dabei wird es für die Diagnose und für Fördermaßnahmen der Schüler genutzt.

Mathematische Intelligenz offenbart sich in mathematischem Denken und mathematisches Denken lässt sich in mindestens zehn Facetten gliedern, wie sie in Abb. 3 dargestellt sind.

Diese zehn Komponenten mathematischen Denkens sind natürlich nicht unabhängig voneinander. Beispielsweise ist numerisches Denken eng mit ebengeometrischem Denken verbunden (z. B. Zahlen als Punkte am Zahlenstrahl, Zahlen als Streckenlängen, Zahlen als Vektoren, Vorstellungen von Brüchen), stochastisches Denken hängt mit numerischem Denken zusammen (z. B. Zählprinzip der Kombinatorik als Anwendung der Multiplikation, Wahrscheinlichkeit als Bruch) etc.

Hierbei ist zu bemerken, dass in diesem Modell der Begriff „Denken“ alle kognitiven Prozesse der Wahrnehmung, der Verarbeitung, Speicherung und des Abrufs mathematikbezogener Information einschließt.

Für schulische Diagnose- und Förderzwecke ist es nützlich, die obige Konzeptualisierung mathematischer Intelligenz in ein noch umfassenderes Modell für mathematische Begabung und mathematische Leistung einzubetten, denn:

- Umfassende Begabung im Fach Mathematik schließt auch sprachliche Fähigkeiten sowie fachunabhängige Kreativität ein.
- Begabung und Leistung sind zu unterscheiden. Der Weg von mathematischer Begabung zu mathematischer Leistung (und damit zu guten Mathematiknoten) wird durch eine Vielfalt von nicht kognitiven Persönlichkeitsmerkmalen sowie Umweltmerkmalen beeinflusst.

Dies berücksichtigt das Modell mathematischer Begabung und mathematischer Leistung in Abb. 4. Es lehnt sich an das „Münchner Hochbegabungsmodell“ von Heller ([10], [11], [12]) an.

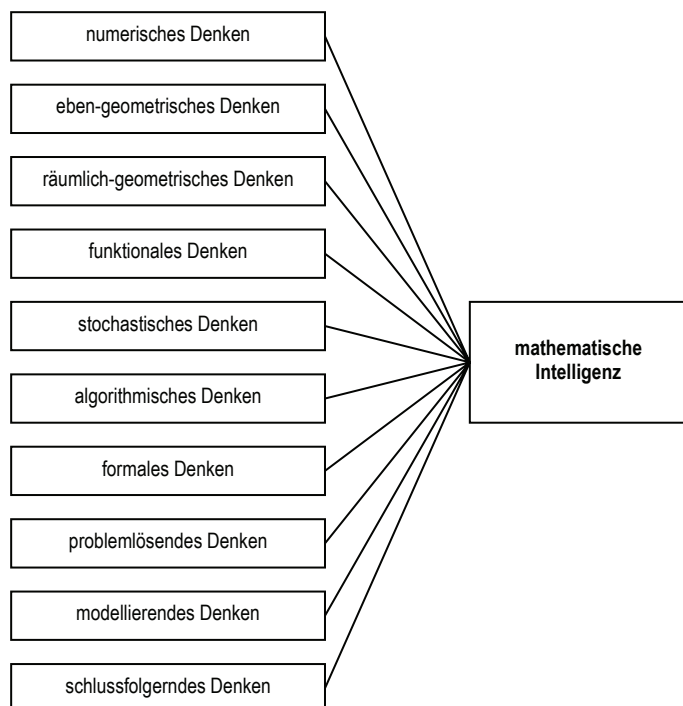


Abb. 3: Facetten mathematischer Intelligenz

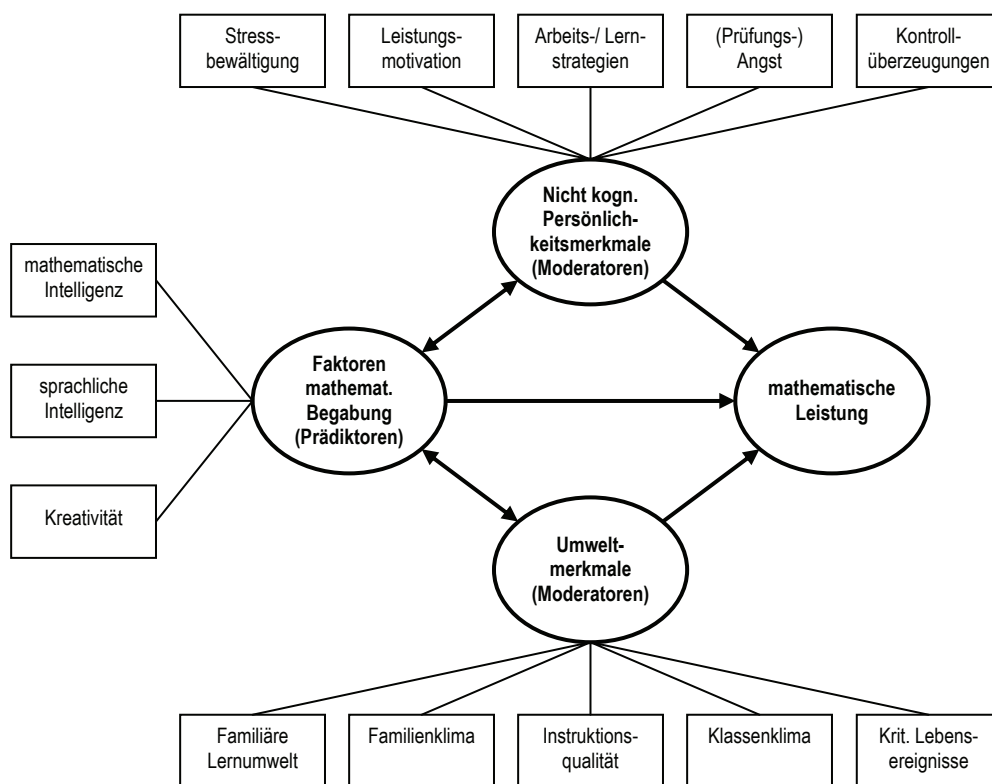


Abb. 4: Begabung und Leistung

Die in der Schule sichtbare mathematische Leistung hängt gemäß diesem Modell einerseits von mathematischer Begabung ab, die neben mathematischer Intelligenz (siehe zehn Komponenten in Abb. 3) auch sprachliche Intelligenz und Kreativität umfasst. Andererseits wird mathematische Leistung von zehn Moderatoren beeinflusst, die teils in der Person selbst, teils in ihrer Umwelt gegründet sind. Gerade die Komplexität dieses Wirkgefüges offenbart, welche vielschichtige und differenziert anzugehende Unterfangen die Diagnose und die Förderung mathematischer Begabung bei Schülern ist.

Begabte ihren Fähigkeiten entsprechend zu fördern, ist eine Aufgabe des Bildungswesens – dies wurde bereits oben erwähnt. Die konkrete Frage dazu lautet: Wie?

Die Maßnahmen, die es gegenwärtig im Bildungssystem dazu gibt, gliedern sich in

- Förderung im regulären Unterricht,
- Enrichment-Programme,
- spezielle Bildungsgänge.

Auf diese drei Bereiche werden wir im Weiteren eingehen.

3. Förderung besonders Begabter im regulären Mathematikunterricht

Der auf den ersten Blick unspektakulärste, aber dennoch wichtigste Bereich der Begabtenförderung ist der reguläre Unterricht. Denken wir an die Abschätzung aus 2.1: Etwa eine Viertelmillion Schüler in Deutschland besitzen einen $IQ \geq 130$ und besuchen je ca. 30 Stunden Unterricht pro Woche. Diese Zeit macht den Hauptteil der Begabtenförderung aus und diese Zeit gilt es zu nutzen! Alle anderen öffentlichkeitswirksamen Aktivitäten (Forscheramps, Pluskurse, Wettbewerbe, ...) sind im Vergleich zum regulären Unterricht im Hinblick auf die erreichten Schüler und die aufgewandte Zeit eher Kür.

Wenn man den Mathematikunterricht so gestalten möchte, dass auch die besonders Begabten adäquat gefördert werden, stößt man auf zwei zentrale didaktische Fragen: Welche Unterrichtsmethodik und welche Aufgaben sind angesichts der Leistungsheterogenität in regulären Klassen tragfähig? Man steht damit vor der Notwendigkeit der Differenzierung der Lernangebote, die der Pädagoge Johann Friedrich Herbart (1776-1841) bereits vor etwa zwei Jahrhunderten mit den Worten angemahnt hat:

„Die Nichtbeachtung der Verschiedenheit der Köpfe ist das entscheidende Hindernis aller Schulbildung.“

3.1 Unterrichtsmethodik – auch für besonders Begabte

Die Frage, wie Mathematikunterricht methodisch zu gestalten sei, um den Fähigkeiten und Bedürfnissen besonders Begabter im alltäglichen Unterricht in besonderem Maße entgegenzukommen, führt zu bekannten Schlagwörtern, die seit Jahren als Forderungen an den Mathematikunterricht herangetragen

werden: Die Schüler sollten eigenverantwortlich, selbstorganisiert, individuell, kooperativ, experimentell, forschend und entdeckend lernen.

Die Grundidee ist dabei ganz einfach: In einer regulären Schulklasse sind Schüler mit sehr unterschiedlichen Begabungen und Leistungspotenzialen zusammen (auch in gegliederten Schulsystemen). Offene, binnendifferenzierende Unterrichtsformen ermöglichen allen Schülern, auf ihrem jeweiligen Fähigkeitsniveau Mathematik zu betreiben. So kommt der Unterricht passgenau allen Schülern zu Gute – nicht nur den besonders Begabten, aber insbesondere auch diesen.

Natürlich gibt es eine Vielzahl von methodischen Konzepten für offenen Unterricht (z. B. [2], [15], [18]). Im Folgenden wird exemplarisch ein Unterrichtskonzept vorgestellt, das „Ich-du-wir-Prinzip“ von P. Gallin und U. Ruf [7]. Es verbindet eigenständiges Arbeiten und kooperatives Lernen mit Unterrichtsgesprächen im Klassenverband und es bietet Leistungsschwächeren wie auch Leistungsstärkeren jeweils individuelle Zugänge zur Mathematik. Es ist insofern exemplarisch, als sich seine Grundstruktur in anderen methodischen Konzepten unter anderen Namen wieder findet, etwa als „Think-Pair-Share“ [14] oder als „Japanisches Modell“ aus TIMSS-Video (z. B. [15]).

ICH: Individuelles Arbeiten

Jeder einzelne Schüler macht sich eigenständig mit einer Thematik oder Problemstellung vertraut, stellt Bezüge zum eigenen Ich, zum individuellen Vorwissen her und geht eigene Schritte in Richtung einer Lösung.

DU: Lernen mit einem Partner

Jeder Schüler tauscht sich mit einem Partner aus, erklärt seine Ideen, vollzieht die Gedanken des anderen nach und dringt so tiefer in das Themengebiet ein. In Partnerarbeit wird weiter an der Problemlösung gearbeitet.

WIR: Kommunikation im Klassenteam

Die Resultate der Arbeitsgruppen werden im Klassenplenum präsentiert und diskutiert. Aus den Beiträgen aller wird ein gemeinsames Ergebnis erarbeitet.

Ich-Phase: Zunächst geht es für jeden Einzelnen darum, eine mathemathikhaltige Situation zu erschließen und zu verstehen, sich zu orientieren und ein Gefühl für die Situation zu gewinnen. Die Thematik ist in das persönliche Vorwissen einzuordnen, Strategien und Lösungsideen sind zu entwickeln und schließlich umzusetzen. Die Analyse dieser Orientierungs- und Bearbeitungsprozesse zeigt, dass es sich hierbei um zutiefst individuelle Vorgänge handelt. Jeder Schüler besitzt ein eigenes „Denk-Netz“ (Vorwissen, Denkmuster, Problemlösestrategien, ...) und ein eigenes Tempo beim Arbeiten. Deshalb

erscheint es sinnvoll und zweckmäßig zugleich, diese Phase jeden Schüler individuell durchlaufen und durchleben zu lassen.

Du-Phase: Haben die Schüler einen ersten Zugang zu einer Thematik gefunden, ist es ein sehr natürlicher Fortgang, dass sie sich mit ihren Mitschülern darüber unterhalten. In der Du-Phase stehen die Kooperation und die Kommunikation mit dem Nachbarn oder in einer Kleingruppe im Mittelpunkt. Ein derartiger Austausch begünstigt Lernen in mehrerer Hinsicht. Einerseits führt das aktive Kommunizieren zu einer weiteren Durchdringung des Stoffes, andererseits kann der Nachbar helfen, wenn es darum geht, Verständnisfehler zu klären, Grundlagenwissen zu aktivieren, weitere Ideen zu entwickeln und auftretende Probleme zu bewältigen. Ein derart kooperatives Arbeiten unterstützt aber auch den Aufbau sozialer Kompetenzen, indem es Schüler dazu veranlasst, einander zuzuhören, zusammenzuarbeiten, sich wechselseitig zu unterstützen, miteinander zu diskutieren, mit diskrepanten Ansichten umzugehen und Kompromisse zu schließen.

Wir-Phase: In der Wir-Phase findet zweierlei statt: Zum einen stellen die Schülerarbeitsgruppen ihre Überlegungen und Ergebnisse im Klassenplenum vor, zum anderen wird unter der fachkundigen Moderation der Lehrkraft eine gemeinsame Lösung entwickelt. Die Schüler trainieren das Reden über Mathematik, das Präsentieren eigener Ergebnisse, aber auch das Sprechen vor einer Gruppe, der Klasse. Natürlich wird man nicht davon ausgehen können, dass die Berichte der Schüler hinsichtlich des Inhalts, der Darstellung und der Verständlichkeit stets perfekt sind. Dies muss aber kein Manko sein, im Gegenteil: Ein fundamentales Bildungsziel des Mathematikunterrichts ist es, den Schülern Kommunikations- und Argumentationskompetenz zu vermitteln. Der wohl einzige Ort, an dem derartige Schlüsselkompetenzen mit Bezug zu Mathematik systematisch vermittelt werden, ist der Mathematikunterricht. Deshalb gilt es, die sich dort ergebenden Lernchancen zu nutzen. Schließlich kann der Dreischritt „Ich, du, wir“ zu einem Abschluss gebracht werden, indem die Schülerresultate unter Leitung der Lehrkraft zu einem Gesamtergebnis zusammengefasst bzw. erweitert werden. Die Schüler sind dann „reif“ für eine fundierte Ergebnissicherung, die mathematische Konventionen, den stofflichen Rahmen und curriculare Vorgaben berücksichtigt – auch in Form eines Lehrervortrags.

Fazit: Das Konzept „Ich, du, wir“ ist natürlich nur ein methodischer Weg von vielen. Man könnte ihn auch „Einzelarbeit, Partnerarbeit, Klassengespräch“ nennen. Allerdings drückt der Dreiklang „Ich, du, wir“ treffend aus, dass alle drei Phasen eng zusammengehören, sich gegenseitig bereichern und für individuelle und kooperative Lernprozesse unent-

behrlich sind. Gleichzeitig bietet dieses Konzept einen organisatorischen Rahmen, in dem Schüler auf ihrem jeweiligen Begabungs- und Leistungsniveau Mathematik erforschen, entdecken und erleben können.

3.2 Offene Aufgaben – auch für besonders Begabte

Aufgaben, die im regulären Mathematikunterricht sowohl Leistungsschwächeren Lernfelder bieten, als auch für Leistungsstärkere Herausforderungen darstellen, müssen in ihrer Struktur eine gewisse Offenheit besitzen. Sie müssen ein Beschäftigen mit Mathematik auf verschiedenen Niveaus zulassen bzw. anregen. Leistungsschwächere sollten Einstiege finden und Erfolgserlebnisse verspüren können, Leistungsstärkere sollten entsprechend ihren Fähigkeiten Mathematik betreiben können.

Offene Aufgaben umreißen eine mathematikhaltige Situation und laden zum Erkunden von Mathematik ein. Sie können auf verschiedene Weise klassifiziert werden (z. B. [6]), es gibt verschiedene Strategien, um offene Aufgaben zu gewinnen (z. B. [15]). Im Folgenden werden exemplarisch drei offene Aufgaben vorgestellt, die in der Unter-, der Mittel- und der Oberstufe des Gymnasiums zum Mathematiktreiben auf verschiedenen Anspruchsniveaus einladen.

3.2.1 Offene Aufgaben in der Unterstufe

Fußbälle



- Stelle zu diesem Bild möglichst vielfältige mathematische Fragen und versuche, sie zu beantworten.
- Besprich deine Ideen und Ergebnisse mit deinem Nachbarn!
- Präsentiere mit deinem Nachbarn die schönsten Resultate im Klassenteam.

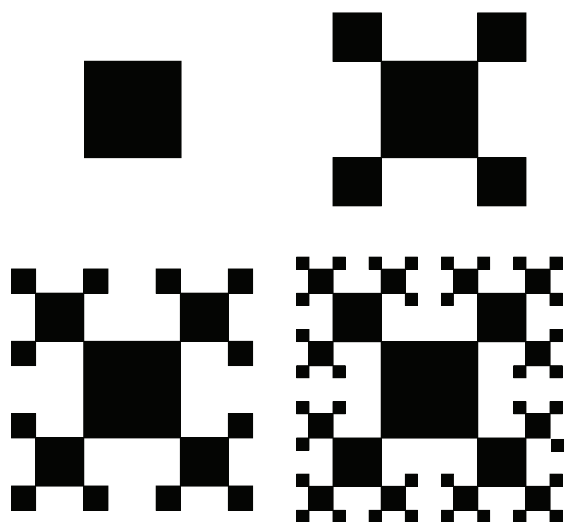
Leistungsschwächere Schüler werden Erfolgserlebnisse haben, wenn sie Fragen nachgehen wie etwa: Wie groß ist ein Fußball? Wie groß ist ein Fußballplatz? Wie viele Bälle passen auf den Fußballplatz? Leistungsstärkere können darauf aufbauend – je nach Phantasie und Interesse – beispielsweise unter-

suchen: Wie lange braucht man, um die Bälle aufzupumpen oder sie auf dem Platz zu verteilen? Wie viele LKWs benötigt man, um die Bälle abzutransportieren? In welcher Anordnung bringt man möglichst viele Bälle auf dem Platz unter? Dabei findet jeweils substanzielles mathematisches Arbeiten der Schüler statt. Als methodisches Konzept für diese Aufgabe eignet sich etwa das „Ich-Du-Wir-Prinzip“ aus 3.1, wobei in der Du-Phase je nach Situation in der Klasse zu entscheiden ist, ob eher leistungshomogene oder eher leistungsheterogene Kleingruppen gebildet werden sollten.

3.2.2 Offene Aufgaben in der Mittelstufe

Muster aus Quadraten

Mit Quadraten wird eine Folge von Mustern erzeugt: Ausgehend von einem großen Quadrat werden jeweils an freie Ecken kleinere Quadrate angesetzt. Von Schritt zu Schritt werden die Seitenlängen der Quadrate um den konstanten Faktor k kleiner.



- Überlege dir zu dieser Folge von Figuren möglichst vielfältige mathematische Fragestellungen und schreibe diese auf.
- Bearbeite mit deinen Nachbarn gemeinsam einige eurer Fragestellungen.
- Stellt gemeinsam eure Ideen und Ergebnisse in der Klasse vor.

Schon beim ersten Betrachten laden diese Muster zu mathematischem Nachdenken, zum Stellen von Fragen, zum Forschen, Probieren und Entdecken, kurz: zum Betreiben von Mathematik ein. Je nach Phantasie, Interesse und Begabung können die Schüler verschiedenste Aspekte erkunden, etwa:

- Zahl der Quadrate,
 - Flächeninhalt der Muster,
 - Umfang der Figuren,
 - Überlappungen bzw. Berührungen im Muster,
 - Symmetrieeigenschaften,
 - Zahl der Eckpunkte,
 - kleinstes Quadrat, das das n -te Muster einschließt,
 - kleinstes Quadrat, das alle Muster einschließt,
 - Verhalten der Folge der Flächeninhalte,
 - Verhalten der Folge der Umfänge,
 - Computerprogramm zum Generieren der Muster.
- Auch bieten sich Variationen an, die wiederum eine Fülle interessanter Fragen aufwerfen: Statt Quadraten könnte man Dreiecke, Fünfecke oder andere Polygone betrachten und diese auf jeweils unterschiedliche Art zusammensetzen. Begabte Schüler könnten das Bildungsprinzip der Muster ins Dreidimensionale erweitern, indem sie analoge Körper aus Würfeln, Tetraedern etc. bilden und etwa Volumina und Oberflächen erforschen.

3.2.3 Offene Aufgaben für die Oberstufe

Kreiskegel

Aus einem Kreissektor wird ein Kegel hergestellt. Untersuche, wie die Maße des Kegels (z.B. Höhe, Oberfläche, Volumen) von den Maßen des Sektors abhängen!

Leistungsschwächere Schüler können elementare Einsichten festigen bzw. vertiefen, wenn sie sich die Zusammenhänge zwischen den Größen am Kreissektor (Radius, Mittelpunktswinkel, Bogenlänge) und den Größen am Kegel (Mantellinie, Höhe, Grundkreisradius, Grundkreisumfang) geometrisch bewusst machen und wenn sie elementare funktionale Zusammenhänge (z. B. für das Kegelvolumen oder die Kegelmantelfläche in Abhängigkeit von den Sektormäßen) aufstellen und mit Methoden der Analysis explorieren. Die Thematik bietet aber auch für Leistungsstärkere tiefgründige Herausforderungen: Das Extremwertproblem, für welchen Mittelpunktswinkel des Sektors (bei konstantem Radius) das zugehörige Pyramidenvolumen maximal ist, führt auf eine Funktion der Form $f(x) = x^2 \sqrt{1-x^2}$. Diese Funktion umfassend zu diskutieren, erfordert zwar nur Standardverfahren der Oberstufenanalysis, allerdings benötigt man für die praktische Ausführung der Berechnungen doch allerlei mathematisches Verständnis. Durch Spiegeln des Graphen an den Koordinatenachsen gelangt man zur algebraischen Kurve mit der Gleichung $y^2 = x^4(1-x^2)$. Sie besitzt eine Fülle von Querverbindungen zu Kegelschnitten oder zu algebraischen Kurven wie der Lemniskate oder der Tschirnhaus-Kubik (vgl. [5], ein Artikel für interessierte Schüler und Lehrkräfte).

4. Förderung besonders Begabter durch Enrichmentangebote

Enrichmentprogramme wenden sich an besonders begabte Schüler, die über den regulären Schulunterricht hinaus mit ergänzenden Angeboten Förderung erfahren sollen. Beispiele sind etwa Pluskurse, Arbeitsgemeinschaften, Wettbewerbe, Schülerakademien, Feriencamps, Frühstudien an Universitäten etc. Wenn man sich derartige Auflistungen ansieht, könnte man mit dem, was das Bildungssystem an Zusatzförderangeboten auf die Beine stellt, ganz zufrieden sein. Allerdings nur auf den ersten Blick: Ob ein Schüler davon profitieren kann, hängt stark von Zufällen ab. Einen Pluskurs Mathematik gibt es an einer Schule nur, wenn an der Schule gerade ein Lehrer ist, der so etwas anbietet, und wenn das Stundenbudget die notwendigen Lehrerstunden zulässt. Systematische Förderung mit Wettbewerbsaufgaben findet nur statt, wenn sich ein Lehrer an der jeweiligen Schule darum kümmert – im Idealfall in einem Arbeitskreis für Begabte.

Dies sind aber Zufälle! Hier fehlt die Systematik in einem Flächenland wie Deutschland. Wenn an einer Schule keine kontinuierliche Begabtenförderung im Fach Mathematik stattfindet, dann haben die Schüler an dieser Schule diese Chancen nicht. Denken wir zurück an die Abschätzung aus 2.1: Eine Viertelmillion Schüler in Deutschland haben einen $IQ \geq 130$. Dem müssen wir bundesweit, systematisch und kontinuierlich gerecht werden. Das sind wir nicht zuletzt den Kindern schuldig. Der Deutsche Philologenverband forderte dazu in der in der Einleitung erwähnten Presseerklärung „für alle Gymnasien in Deutschland einen Zusatzpool von jeweils 10 Stunden, um jeder einzelnen Schule das Angebot eines spezifischen Hochbegabtenförderungsprogramms zu erlauben“ [17].


Lehrkräfte, die Zusatzangebote wie etwa Pluskurse für mathematisch besonders Begabte anbieten, stehen oftmals vor einem konkreten Materialproblem. Man benötigt mathematische Themen und Materialien für die Schüler, die inhaltlich über die Lehrpläne hinausgehen, aber mit Schulmathematik erschließbar sind. Hier helfen gewöhnliche Schulbücher kaum weiter. Deshalb ein Hinweis: Anlässlich des Jahrs der Mathematik 2008 wurde bei Lehrer Online ein Themenschwerpunkt „Begabte fördern“ eingerichtet. Er bietet Unterrichtseinheiten für besonders begabte und interessierte Schüler und besitzt die Adresse:


<http://www.lehrer-online.de/jahr-der-mathematik.php>

Begabte fördern

Mathematik
Alles, was zählt

Tipps der Redaktion





ALGEBRA
Begabte Schülerinnen und Schüler untersuchen und erzeugen eigene magische Quadrate.
► [Magische Quadrate](#)

ANALYSIS
Einführung in nichtlineare dynamische Systeme, die "Chaos-Theorie" und die damit verbundene fraktale Geometrie
► [Ein\(-\)Blick ins Chaos](#)

Die Idee dieses Portals ist, mit begabten Schülern nicht Inhalte aus späteren Jahrgangsstufen vorwegzunehmen, sondern Mathematik zu erforschen und zu entdecken, die nicht im Lehrplan steht, aber auf dem Lehrplan aufbaut. Einige Beispielthemen zur Illustration: „Vorstoß in die vierte Dimension – der Hyperwürfel“, „Von Kegeln zu höheren algebraischen Kurven und zurück“, „Zahnräder im Mathematikunterricht“, „Diophantische Gleichungen mit Stammbrüchen“, „Verlust einer Dimension – die Zentralperspektive“.

5. Förderung besonders Begabter durch spezielle Bildungsgänge

Als letzte Linie der Begabtenförderung seien spezielle Bildungsgänge und spezielle Schulen angesprochen, zu denen nur Schüler mit nachgewiesener Hochbegabung zugelassen werden: Begabtenzüge an bestehenden Gymnasien oder gar Begabtgymnasien. Diese Entwicklung ist gegenwärtig bundesweit stark im Trend. Konkrete Beispiele aus nur drei Ländern – sie finden sich analog auch in anderen Bundesländern (vgl. [12]): In Bayern ist ab dem Schuljahr 2009/10 in jedem der sieben Regierungsbezirke mindestens ein Gymnasium mit Begabtenzweig eingerichtet. Baden-Württemberg besitzt bereits eine zweistellige Anzahl derartiger Gymnasien. Außerdem gibt es in Baden-Württemberg und in Sachsen reine Hochbegabten-Gymnasien, etwa das „Landesgymnasium für Hochbegabte“ in Schwäbisch-Gmünd oder das „Sächsische Landesgymnasium St. Afra“ in Meisen.

Es sei die Frage in den Raum gestellt: Ist diese von der Politik gegenwärtig angestoßene Entwicklung wirklich „gesellschaftlich gewollt“?

Ein „dünnes“ Netz an Gymnasien mit Begabtenzweig oder an reinen Begabtgymnasien, wie es gegenwärtig existiert, ist im Flächenland Deutschland den Schülern gegenüber nicht fair. Egal, an welchen Orten diese Form der Begabtenförderung eingerichtet ist, die Mehrzahl der besonders begabten Schüler ist davon – schon allein aus Gründen des Schulwegs – ausgeschlossen.

Als Konsequenz könnte man fordern: Begabtgymnasien müssten flächendeckend eingerichtet werden. Aber wollen wir wirklich eine Entwicklung hin zu *Begabten-Gymnasien* und zu *Realschul-Gymnasien*?

Wenn wir das nicht wollen, müssen wir Wege entwickeln und konsequent gehen, mit denen die besonders Begabten im regulären Schulsystem bestmöglich gefördert werden. In den Abschnitten 3 und 4 wurden dazu Möglichkeiten und Ansätze skizziert. Es ist eine Aufgabe aller am Bildungswesen Beteiligten, sich in den gesellschaftlich-bildungspolitischen Verhandlungsprozess zur Weiterentwicklung des Schulsystems konstruktiv einzubringen – gemäß dem Gedanken:

*Die Zukunft kommt nicht, sie wird gemacht.
Und das Machbare braucht die Entwicklung von
Vorstellungen – von dem was morgen nötig ist und
dem was für übermorgen bedacht sein muss.
(W. Lorbeer)*

6. Literatur

- [1] BARDY, P. (2007): Mathematisch begabte Grundschul Kinder, Diagnostik und Förderung, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg
- [2] BARZEL, B.; BÜCHTER, A.; LEUDERS, T. (2007): Mathematik-Methodik, Handbuch für die Sekundarstufe I und II, Cornelsen Scriptor, Berlin
- [3] BAUERSFELD, H. (2003): Hochbegabungen – Bemerkungen zu Diagnose und Förderung in der Grundschule, in: Baum, M.; Wielpütz, H. (Hg.): Mathematik in der Grundschule, Kallmeyer, Seelze
- [4] BAUERSFELD, H.; KIEBWETTER, K. (Hg., 2006): Wie fördert man mathematisch besonders befähigte Kinder?, Mildenerger, Offenburg
- [5] BRANDL, M. (2008): Kegel, Ellipse und Tschirnhaus-Kubik – eine Metamorphose, Preprint des Instituts für Mathematik der Universität Augsburg, Nr. 28/2008, <http://www.opus-bayern.de/uniaugsburg/volltexte/2008/1303/>
- [6] BRUDER, R. (2006): Erläuterungen zu Modul 1 – Weiterentwicklung der Aufgabenkultur im Mathematikunterricht, <http://sinus-transfer.de>
- [7] GALLIN, P.; RUF, U. (1998): Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik, Kallmeyer, Seelze
- [8] GARDNER, H. (2001): Abschied vom IQ, Die Rahmen-Theorie der vielfachen Intelligenzen, Klett Cotta, Stuttgart, 3. Aufl.
- [9] HANY, E. (1987): Modelle und Strategien zur Identifikation hochbegabter Schüler, Dissertation, LMU München
- [10] HELLER, K. (Hg., 2001): Hochbegabung im Kindes- und Jugendalter, Hogrefe, Göttingen
- [11] HELLER, K. u. a. (Hg., 2007): International Handbook of Giftedness and Talent, Elsevier, Amsterdam, 2. Aufl.
- [12] HELLER, K.; ZIEGLER, A. (Hg., 2007): Begabt sein in Deutschland, LIT Verlag, Berlin
- [13] KIEBWETTER, K. (1992): Mathematische Begabung – über die Komplexität der Phänomene und die Unzulänglichkeiten von Punktbewertungen, in: Der Mathematikunterricht MU, 38, H. 1, S. 5-18
- [14] LYMAN, F. (1981): The responsive classroom discussion, in: Anderson, A. S. (Ed.): Mainstreaming Digest, University of Maryland, College Park
- [15] ULM, V. (2007): Mathematikunterricht für individuelle Lernwege öffnen, Kallmeyer, Seelze, 3. Aufl.
- [16] WETH, T. (1999): Kreativität im Mathematikunterricht, Franzbecker, Hildesheim
- [17] Homepage des Deutschen Philologenverbands <http://www.dphv.de>, Presseerklärung vom 08.01.08
- [18] SINUS-Transfer-Server <http://sinus-transfer.de>