Die Pythagorasfigur in Schieflage

Beobachtungen im Kölner Odysseum

WOLFGANG GÖBELS

Ergänzung zur Artikel

Möglichkeit der Verallgemeinerung des Problems

Statt des im Zeitschriftenartikel betrachteten Spezialfalls $b = 0{,}75a = 0{,}75 \cdot 8 = 6$ lässt sich das Problem auch auf $b = k \cdot a = 8k$ mit $0 < k \le 1$ verallgemeinern. In diesem Fall ist der Lösungsweg allerdings für Schülerinnen und Schüler bei weitem zu aufwändig und erreicht eine zu hohe Abstraktionsstufe, die nicht mehr lehrplankonform ist. Für interessierte Kolleginnen und Kollegen soll jedoch hier in Analogie zum betrachteten Spezialfall eine Lösungsskizze für die Verallgemeinerung von t vorgestellt werden.

Gerade durch $B(0|-8k)$ und $G(8|0)$:

$$g: y = kx - 8k.$$

Gerade durch $G(8|0)$ mit Steigung $-\frac{1}{k}$

$$h: y = -\frac{1}{k}x + \frac{8}{k}.$$

Schnittpunkte der Geraden $y = -8k + t$ und g:

$$S_1\left(\frac{t}{k}\middle|-8k+t\right).$$

Schnittpunkt der Geraden $y = -8k + t$ und h:

$$S_2\left(8k^2 - tk + 8 \middle| -8k + t\right).$$

Die Länge der Grundseite $\overline{FE}$ des Dreiecks FEG ist Differenz der x-Werte von S_2 und S_1:

$$\overline{FE} = 8k^2 - tk + 8 - \frac{t}{k}.$$

Die Höhe auf $\overline{FE}$ ist $8k - t$.
Damit beträgt der Flächeninhalt

$$A_D = \frac{1}{2} \cdot \overline{FE} \cdot (8k - t) = 32k^3 - 8k^2t + \frac{1}{2}kt^2 + 32k - 8t + \frac{t^2}{2k}.$$

Die grau gefärbten Figuren bestehen aus einem Rechteck und einem Fünfeck.
Das Rechteck $ABHK$ hat den Inhalt

$$A_R = 8kt,$$

das Fünfeck $BCDEF$ den Inhalt

$$A_F = c^2 - A_D = -32k^3 + 64k^2 + 8k^2t - \frac{1}{2}kt^2 - 32k + 8t - \frac{t^2}{2k} + 64.$$

Der Gesamtflächeninhalt beträgt

$$A = A_R + A_F = -32k^3 + 64k^2 + 8k^2t + 8kt - \frac{1}{2}kt^2 - 32k + 8t - \frac{t^2}{2k} + 64.$$

Aus $A = c^2$ folgt

$$-32k^3 + 64k^2 + 8k^2t + 8kt - \frac{1}{2}kt^2 - 32k + 8t - \frac{t^2}{2k} + 64 = 64 + 64k^2$$

$$\Leftrightarrow -32k^3 + 8k^2t + 8kt - \frac{1}{2}kt^2 - 32k + 8t - \frac{t^2}{2k} = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - \frac{16k(k^2+k+1)}{k^2+1}t + 64k^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{8k\left((k^2+k+1) \pm \sqrt{k} \cdot \sqrt{2k^2+k+2}\right)}{k^2+1}.$$

Für den Füllstand t muss $t < 8k$ gelten. Dies kann nicht für die Lösung

$$t = \frac{8k\left((k^2+k+1) + \sqrt{k} \cdot \sqrt{2k^2+k+2}\right)}{k^2+1}$$

gelten, also kommt nur die kleinere der beiden Lösungen für t infrage, nämlich

$$t = \frac{8k\left((k^2+k+1) - \sqrt{k} \cdot \sqrt{2k^2+k+2}\right)}{k^2+1}.$$

Für $k = 0{,}75$ bestätigt dieses Ergebnis den in Abschnitt 4 betrachteten Spezialfall $t \approx 2{,}33$.

OStR Dipl.-Math. WOLFGANG GÖBELS, In den Wiesen 9, 51467 Bergisch Gladbach, Wolgang.Goebels@t-online.de, unterrichtet Mathematik und Informatik am Kölner Rhein-Gymnasium. Seit 1991 schreibt er zahlreiche Aufsätze und Unterrichtsreihen in verschiedenen mathematischen Fachzeitschriften und ist als Schulbuchautor tätig.