

HANS-WOLFGANG HENN –
TU Dortmund
JAN HENDRIK MÜLLER –
TU Dortmund & Rivius-Gymnasium
Attendorf

Zu: Empfehlungen für zentrale Prüfungen in Mathematik

(G. GREEFRATH, H.-J. ELSCHENBROICH
und R. BRUDER
in MNU 63/3 (2010), 172ff)

»Nicht der Hammer ist der Mörder«

Beide Autoren stehen einem Zentralabitur durchaus positiv gegenüber – wenn es vernünftig angelegt ist. Dies impliziert aus unserer Sicht auch den Einsatz von Mathematiksoftware im hierauf vorbereitenden Mathematikunterricht und eine angemessene Behandlung realitätsnaher Probleme (im Sinne der ersten Winter'schen Grunderfahrung). Denn nicht das Abitur selbst die Ursache allen Übels, sondern seine normative Wirkung auf den hierauf vorbereitenden Unterricht, wenn es ein wenig zutreffendes Bild von Mathematik kolportiert – darauf soll der Titel unseres Beitrags hinweisen. Eine ebenso bedeutsame und zu diskutierende Frage ist, inwieweit sinnvolle Inhalte für den Mathematikunterricht und deren Berücksichtigung in zentralen Abiturprüfung umgesetzt werden können.

Langjährige Erfahrungen (der erste Autor war 20 Jahre lang Lehrer und Fachleiter im Zentralabitur-gesegneten Baden-Württemberg) zeigen die Tendenz, dass das Zentralabitur in der Praxis vom deskriptiven Modell zum normativen Modell degeneriert: Das (zentrale) Abitur soll beschreiben, was der Mathematikunterricht in der Schule bei den Lernenden erreicht hat, ist also ein deskriptives Modell. In der Realität wird aber das Abitur zum normativen Modell: Nur auf ein »gutes Abitur« hin wird gearbeitet. Also muss man dafür sorgen, dass die Lernenden für ein »gutes Abitur« sowohl über Syntax als auch Semantik der jeweiligen mathematischen Inhalte verfügen. Gleichwohl werden Abituraufgaben als (nicht notwendigerweise gutes) Leitbild »erwünschter« Mathematikaufgaben taxiert. Sie dienen somit als Vorlage für viele Unterrichtsstunden und tragen dazu bei, ein nicht unbedingt wünschenswertes Bild von und über Mathematik in den Köpfen der Schüler zu erzeugen.

Betrachten wir ein Beispiel aus der Analysis: Eine pragmatische Sicht der Dinge

bei der Differential- und Integralrechnung ist zunächst, das CAS als schnell verfügbare und umfassende Formelsammlung zu sehen, das z. B. ableiten und integrieren kann. Zumindest die Älteren von uns werden sich noch an den gute alten Kamke erinnern, mit Hilfe dessen und mit Hilfe trickreicher Kniffe wir früher komplizierte Stammfunktionen bestimmen lernten. Wir vertreten den Standpunkt, dass dies – isoliert und kontextfrei betrieben – eine Kunst von gestern ist. Inzwischen gibt es alternativ viele produktive und publizierte Unterrichtsvorschläge, die aufzeigen, welche Fragestellungen eine Suche nach elementaren wie auch äußerst komplexen Stamm- bzw. Integralfunktionen motivieren. Die Rekonstruktion eines zurückgelegten Weges aus einem vorgegebenen Geschwindigkeits-Zeit-Graphen oder die Herleitung der Zeitgleichung sind zwei Pole des Komplexitätskontinuums möglicher Anwendungen. Für überzogenes sinnfreies Techniktraining ist insbesondere die knappe Zeit in der Schule zu schade. Leider ziehen die Lehrplan-Verfasser in vielen Bundesländern, z. B. in NRW und in Baden-Württemberg hieraus nicht selten falsche Schlüsse: Mit dem Hinweis, dass man heute ja einen CAS-Taschenrechner zur Verfügung hat, wurden in Oberstufenkursen zu Analysis die einfachen Ableitungs- und Integrationsregeln ersatzlos gestrichen. Man kann in der Schule sicher darauf verzichten, trickreiche Ableitungen und Integrale mit der Hand zu berechnen. Es ist jedoch sträflich, auf die Einsicht zu verzichten, die die Herleitung dieser Regeln vermittelt. Die durchaus anschauliche und exemplarische Herleitung der üblichen Ableitungsregeln vertieft z. B. das Verständnis dessen, was der Übergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotient inhaltlich bedeutet. Die Übertragung der Ableitungsregeln zu den Integrationsregeln ist eine fundamentale Anwendung des Hauptsatzes. Diese Inhalte entsprechen zu 100 % dem, was Heinrich Winter als zweite Grunderfahrung fordert. Gleichzeitig erfahren die Lernenden zumindest im Prinzip, wie das CAS rechnet. Diese Einsicht hat zwar nichts mit Gewandtheit und Fertigkeit beim Anwenden solcher Regeln zu tun, der Verzicht auf diese Einsicht führt jedoch zu einer vorstellungsfreien und sinnentstellten Knopfdruck-Pseudo-Mathematik. Diese Tendenz wird durch die Art der derzeitigen und schon lange in vielen Bundesländern im Zentralabitur gestellten Aufgaben verstärkt.

Die in NRW übliche Unterscheidung zwischen Aufgaben für GK bzw. LK, mit CAS bzw. ohne ist derzeit rein kalkül-ori-

entiert. Wir diskutieren diese Aufgaben mit unseren Gymnasialstudierenden in Didaktikveranstaltungen zur Analysis und zur Analytischen Geometrie. Die Studierenden kritisieren zu Recht die nicht nachvollziehbare Unterscheidung der vier Aufgabentypen, die bei allen Aufgabenteilen vorherrschende Kalkül-orientierung und die wenig sinnvolle »Anwendungsorientierung«. Ein »Klassiker« in Abiturprüfungen ist beispielsweise die durchzuführende Kurvendiskussion einer ganzrationalen Funktion dritten Grades. Als Kontexte werden z. B. die Zuflussgeschwindigkeit von Wasser in einen Stausee (Mathematik Grundkurs, Abiturprüfung NRW 2007) oder die Herzfrequenz eines Sportlers während des Radtrainings (Mathematik Grundkurs, Abiturprüfung NRW 2009) herangezogen. Fragen, die eine kritische Reflektion dessen erfordern, ob oder inwiefern sich eine Beschreibung solcher Vorgänge mit Polynomen rechtfertigen lässt, findet man nicht. Wenn sich zwischen mathematischen und realen Modellen in Prüfungsaufgaben nur vordergründige syntaktische Bezüge herstellen lassen, so möge man auf die Analyse von Pseudokontexten verzichten und »ehrliche« Mathematik betreiben. Denn: Zentrale Prüfungen haben einen gewaltigen Einfluss auf den Mathematikunterricht. Daher können sie den Unterricht positiv lenken und die wichtigen Verbindungen von Mathematik und »dem Rest der Welt« fördern. Für die Schülerinnen und Schüler ist die Bearbeitung der oben genannten Scheinanwendungsprobleme jedoch darauf reduziert, den Algorithmus zu finden, der in dem Aufgabentext versteckt ist. Es findet keine ernstgemeinte Modellierung und oft keine Rückübersetzung in die Realität statt, sondern die Arbeit startet sofort auf der Seite der Mathematik und bleibt auch dort. Nach vielen Erfahrungen mit schon gestellten Abituraufgaben und nach vielen Diskussionen in einschlägigen Expertenkreisen (z. B. ISTRON und ICTMA) sind wir der Meinung, dass echte Modellierungsaufgaben für zentrale Prüfungen nicht geeignet sind.

Der Einsatz mathematischer Soft- und Hardware steckt in der Schule noch in den Kinderschuhen und ist dementsprechend teuer. Bekommt man leistungsfähige »einfache« Taschenrechner für etwa 10 €, so kosten CAS-Taschenrechner schon etwa das 10-fache. Zudem lernen viele Gymnasiallehrer auch heute noch in ihrer Studienzeit weder DGS noch CAS und deren didaktisches Potential systematisch kennen. Zwar gibt es eine fast unüberschaubare Vielzahl an Unterrichtsideen zum Einsatz von CAS und DGS, es fehlt landesweit und

länderübergreifend jedoch immer noch ein allgemein akzeptierter didaktischer Leitfaden – Ergebnisse des CALIMERO Projektes stellen zumindest für die Sekundarstufe I einen Anfang dar.

Die Leistungsfähigkeit und Bedienung der Hardware ändert sich ständig in fast unüberschaubarer Weise. Eine individuelle Nutzung von CAS oder DGS setzt wiederum das Vorhandensein der Schüleranzahl entsprechend vieler (Taschen-) Rechner in der Schule voraus (die zudem auch alle funktionsbereit sein müssen!). Andererseits wollen die Schuladministrationen in den Bundesländern den Einsatz von Hilfsmitteln in zentralen Prüfungen aufs Kleinste reglementieren und »niet-und-nagelfest« machen. Das ist ein Unding, das niemals gelingen kann.

Wir plädieren daher für eine Zweiteilung des Abiturs in zwei gleichgewichtige Teile: Ein zentral gestellter Teil, in dem keinerlei Hilfsmittel zugelassen sind und sowohl relevante Kalkülfertigkeiten als auch Verständnis und adäquate Grundstellungen abgeprüft werden. Es erscheint dann auch nicht mehr sinnvoll, viele verschiedene Abituraufgaben zu erstellen, aus denen der Kurslehrer dann mühselig und oft unter Zeitdruck am Vortag des Abiturs auswählen muss. Dies spart Zeit und Geld und erleichtert die Sicherung der Qualität der Aufgaben im oben beschriebenen Sinne. Wie so etwas gehen kann, zeigen die Vorschläge zu zentralen Arbeiten in Klasse 11 aus dem Regierungsbezirk Düsseldorf, über die wir seinerzeit von Bernd Westermann unterrichtet worden sind. Der zweite Teil wird lokal vom Klassenlehrer gestellt und kann genau die Technik verwenden und auf die Themen eingehen, die Gegenstand des konkreten Unterrichts der Klasse waren. Der eine Lehrer kann auf ein ihm wichtiges innermathematisches Gebiet eingehen, die andere Lehrerin eine Frage aus einem komplexeren Anwendungsgebiet stellen – was macht im Unterricht (auch den Schülern!) mehr Spaß, als Themen zu behandeln, die einem selbst am Herzen liegen? Es wäre schlimm, wenn die Politik den Lehrerinnen und Lehrern die Kompetenz absprechen würde, solche Abiturteile erstellen zu können. Schließlich sind die Punkte für das Zentralabitur nur ein Bruchteil aller für das Abitur erreichbaren Punkte – und für die anderen Punkte sind allein die Fachlehrer verantwortlich.

Apropos Baden-Württemberg: Wir besitzen die Klettausgabe der Abituraufgaben aus den Jahren 1946–1952. Es ist erfrischend, wie in heutiger Sprechweise »offen« viele dieser Aufgaben formuliert

waren und wie immer wieder Probleme aus dem Alltag vorkamen. An diesen Aufgaben könnte man sich mit Gewinn orientieren. Für viele der späteren Aufgaben aus demselben Bundesland ist ein solches Lob allerdings verfehlt.

HANS-WOLFGANG HENN,
TU Dortmund

JAN HENDRIK MÜLLER,
TU Dortmund & Rivius-Gymnasium Attendorn

Zunächst ein Dank an die Autoren, endlich zu diesem seit Jahren brisanten Thema eine Veröffentlichung verfasst zu haben.

Ich möchte meinerseits einige Punkte, die mir wichtig erscheinen, betonen und ergänzende Aspekte anführen.

1. Längst überfällig ist, dass die Abnehmer (Uni; Wirtschaft) endlich in den Entscheidungsprozess mit einbezogen werden müssen.
2. Ferner sind, wie in Niedersachsen schon eingeführt, aufgelistete Kompetenzen im Umgang mit dem Rechner eminent wichtig. Die Kollegen/innen fühlen sich vollkommen alleine gelassen und gehen mit ihren Schülern/innen ein hohes Risiko ein, wenn sie im Abitur CAS-Aufgaben wählen. Kein Kollege/keine Kollegin möchte, dass seine/ihre Schüler/innen ein schlechtes Abitur machen und gar einen NC verfehlen wegen CAS-Aufgaben.
3. Weiterhin erscheint mir der angeführte Aspekt durchaus nachdenkenswert, einen Teil der schriftlichen Abiturprüfung nicht zentral zu stellen, sondern der Kollege/die Kollegin stellt selbst eine CAS-Aufgabe, die vorher natürlich eingereicht und genehmigt werden muss. Die Vielfalt der auf dem Markt zugänglichen Systeme lässt eigentlich eine für alle Schüler/innen in NRW sinnvolle CAS-Aufgabe fast unmöglich erscheinen.
4. Nicht zuletzt ist es von großer Bedeutung für die Mathematik und insbesondere für den Stellenwert der Schulmathematik, wenn, wie in Baden-Württemberg üblich, ein rechnerfreier Teil in der schriftlichen Abiturprüfung bearbeitet werden muss.
5. Sollte es dennoch bei der momentan gängigen Praxis bleiben, wird es wichtig sein, dass man in NRW gleiche Voraussetzungen für alle Schüler/innen schafft. Als das sind:
 - Gleiche Software für alle und zwar kostenlos (z. B. GeoGebra o. ä.)

- Alle Lehrer/innen müssen in dem jeweiligen System entsprechend fortgebildet werden.
- Jeder Schüler muss im Besitze eines Netbooks sein und dies im Unterricht einsetzen können.

ALOISIUS GÖRG

Fachbeisitzer Mathematik, MNU-Nordrhein

Die Autoren treffen in ihrem Artikel viele richtige Aussagen, nämlich

- Der Einsatz von digitalen Medien in zentralen Prüfungen im Fach Mathematik wird in den einzelnen Bundesländern sehr unterschiedlich gehandhabt, was bei den Lernern auch unterschiedliche Kompetenzen nach Schulabschluss bedingt.
- Die Grenzen zwischen WTR, GTR und CAS sind mittlerweile fließend, so dass eine Trennung nicht mehr sachgerecht ist.
- Schüler mit unterschiedlichen digitalen Werkzeugen haben bei zentralen Prüfungen unterschiedliche Chancen.
- Um nicht-fachbezogene Kompetenzen in zentralen Prüfungen besser zu integrieren und um realistische Aufgabenstellungen zu integrieren, sind leistungsstarke digitale Werkzeuge notwendig.

Wie kann man man aus diesem Dilemma herauskommen? Meines Erachtens ist die einzige Lösung, dass alle Schüler ein eigenes Netbook besitzen und benutzen. Damit wären auf einen Schlag alle oben genannten Probleme gelöst, denn alle Schüler könnten die gleiche freie Software verwenden. Außerdem entsprechen diese Geräte im Handling der üblichen Computernutzung und sind für alle gleich.

Kritiker werden aber sofort einwenden, dass diese Geräte zu teuer seien oder dass durch den Internetanschluss »gemogelt« werden könne.

Nun sind Netbooks heute ab 200 € zu haben und sind sogar in Entwicklungsländern Standard. Außerdem werden bei Anschaffung eines Netbooks andere Kosten eingespart, wie zum Beispiel für einen Taschenrechner, eine Formelsammlung und vielleicht auch für einen Atlas. Freie Software ist heutzutage in großem Umfang vorhanden, so dass keine zusätzlichen Kosten anfallen. Netbooks sind zudem in allen Fächern einsetzbar, immer verfügbar und die Schulen müssen keine Computerräume mehr zur Verfügung stellen und ausstatten.

Und was die Hilfe aus dem Netz angeht, sollen die Schülerinnen und Schüler nicht gerade auch lernen, bestimmte Hilfen zu nutzen?

LOTHAR CARL

Fachreferent Mathematik MNU Westfalen

Eine Diskussion über die zentralen Prüfungen in Mathematik ist längst überfällig. Dabei sind mehrere Themenkomplexe zu untersuchen:

1. Folgen des Zentralabiturs für den Unterricht

Ein Aspekt, der bisher noch nicht ausreichend diskutiert wurde, sind die Folgen, die sich aus der Einführung des Zentralabiturs für den Unterricht und die behandelten Inhalte ergeben haben. Auf eine Kommentierung des Begriffs »Überblickswissen« möchte ich an dieser Stelle verzichten.

Dazu sind einige Fragen zu stellen:

- Wie hoch ist der Anteil der CAS-Schüler?
- Wie hoch ist der Anteil der gewählten Aufgaben
 - im Bereich Stochastik
 - im Bereich Lineare Algebra/Übergangsmatrizen
 - im Bereich Analysis/innermathematischer Kontext?

Über genaue Zahlen gibt es bisher nur Vermutungen:

CAS-Schüler liegen im Anteil bei maximal 5%. Lässt sich daraus der enorme Aufwand für diese Sparte rechtfertigen? Stochastik-Aufgaben werden wegen ihres Schwierigkeitsgrades nur selten gewählt.

Da der zeitliche Aufwand für die Behandlung von Übergangsmatrizen relativ gering ist, wird diese Sparte zunehmend bevorzugt.

Aufgaben mit innermathematischen Kontext werden relativ häufig gewählt. Da sich die Fachlehrer/innen auf die große Auswahlmöglichkeit verlassen können, liegt es nahe, für die Schüler den Weg der geringsten Schwierigkeit zu wählen und mit der Wahl und Intensität der Behandlung der Unterrichtsinhalte die gewünschte Breite in der mathematischen Bildung zu umgehen.

Aber erst wenn konkrete Zahlen bekannt sind, lässt sich über den Einfluss des Zentralabiturs auf den Unterricht in diesem Sinne etwas aussagen.

2. Computer Algebra Systeme (CAS)

Es stellt sich ernsthaft die Frage, ob der Einsatz von CAS den gewünschten Erfolg erzielt, wenn sich herausstellt, dass gerade die mathematischen Fähigkeiten, die auf der Hochschule gefordert werden, eben nicht entwickelt werden. Sind diese Schüler noch in der Lage, z. B. die Integrationsregeln anzuwenden, wenn sie alles per Knopfdruck erreichen können? Sind es nicht gerade die mathematischen Grundfertigkeiten, die sie im Studium wieder benötigen? In vielen Studiengängen der Ingenieurwissenschaften sind z. B. die Hilfsmittel bei Klausuren so eingeschränkt, dass wir Zweifel haben müssen, ob wir die Schüler/innen auf das Studium noch adäquat vorbereiten.

Die Abituraufgaben für CAS unterscheiden sich nicht wesentlich von denen ohne CAS; die Einführung eines Parameters oder die Wahl von Koeffizienten mit vierstelligen Nennern noch keine qualitativen Unterschiede aus. Viele der Aufgaben wirken gekünstelt und geben keinen echten Anwendungsbezug vor. Also auf CAS verzichten? Nein, im Unterricht kann dies eine sinnvolle Ergänzung und Erleichterung sein. Schüler/innen müssen auch in die Arbeitsweise von CAS eingeübt werden.

In der schriftlichen Abiturprüfung? Nein, nicht alles muss geprüft werden. Schon gar nicht die Handhabung eines komplexen CAS. Man sollte lieber die Zeit darauf verwenden, intensiver mit den Grundfertigkeiten zu arbeiten, sie zu festigen und diese dann auch abzufragen.

Weitere Nachteile der CAS:

- Die Kosten für Rechner mit CAS sind noch enorm hoch, deshalb wird es wohl auch keiner wagen, sie verpflichtend einzuführen, weil dann sofort die Frage nach der Finanzierung gestellt werden muss.
- Bisher sind die CAS in der graphischen Darstellung – jedenfalls was die sog. Handhelds betrifft – mehr als dürftig. Wer die Smartphones mit ihrer graphischen Auflösung kennt, wird sich wundern, dass bei Schulrechnern immer noch die Klötzchengrafik vorherrscht.

2. WTR (Wissenschaftliche Taschenrechner) und GTR (Grafikfähige Taschenrechner)

In NRW erhalten Kurse mit WTR oder GTR die selben Aufgaben. Die Annahme,

dass durch die Konstruktion der Aufgaben keine Nachteile für die WTR-Kurse gegenüber den GTR-Kursen besteht, ist nicht zu halten.

Schon innerhalb der WTR-Rechner gibt es große Unterschiede: sie reichen bis zu den GTR-Rechnern heran: Gleichungslösen (bis zum 3. Grad), Matrizenrechnung (bis 3×3), bestimmte Integrale und numerisches Differenzieren, Wertetabellen. All dies ist vorhanden; auf die Grafik muss man zwar verzichten, dieser Vorteil wird sowieso durch Vorgaben im Abitur ausgeglichen.

3. Netbooks als Lösung?

Netbooks sind mittlerweile in den Anschaffungskosten schon fast so preiswert (oder teuer) wie früher die CAS. Für den Mathematikunterricht scheint mir dies allerdings keine Lösung zu sein (s. CAS).

Netbooks in der Schule verlangen eine allumfassende Lösung mit allen Fächern. Erst wenn entsprechende Software vorhanden ist (ja, gibt es: Freeware) **und** Schulbücher in digitaler Form auf Netbooks bezogen werden können, kann man wieder in die Diskussion einsteigen. Zur Zeit ist die Kostenfrage noch so dominierend, dass alles andere keine Rolle spielt.

Schulträger (= Städte), die für die Lehrmittel sorgen sollen, sind zur Zeit nicht in der Lage, dies zu finanzieren.

4. Weiterentwicklung der Richtlinien

Dringend erforderlich ist eine Weiterentwicklung der Mathematik-Richtlinien. Es muss überlegt werden, ob der Stoffkanon für die Schulmathematik noch zeitgemäß ist. M. E. fehlen wichtige Gebiete wie z. B. Parameterkurven (auch für GK!), Programmierung von Grundalgorithmen, Teilgebiete der Finanzmathematik usw.

Am wichtigsten ist allerdings die Behebung des Bruches zwischen G8 und der (nicht geänderten) Oberstufenrichtlinien.

5. Fazit

Den o. a. Ausführungen der Autoren Greefrath u. a. kann ich nur zustimmen:

- Ein vernünftiger Kompromiss ist die verpflichtende Einführung der grafikfähigen Taschenrechner.
- Im Abitur sollte auf die besondere Sparte der CAS-Aufgaben verzichtet werden.

DISKUSSION UND KRITIK

- Um die Grundfertigkeiten der Schüler/innen stärker ins Blickfeld zu rücken, sollte in Absprache mit den Hochschulen ein Kanon von Fertigkeiten erarbeitet werden, der in der schriftlichen Abiturprüfung in einem »Pflichtteil« abgefragt wird.

*StD Dipl.-Math. REINHARD WEISS
Fachlehrer für Mathematik und Informatik
an der Graf-Engelbert-Schule Bochum
Fachreferent für den Internetauftritt des
Landesverbandes Westfalen*

