Empfehlungen für zentrale Prüfungen in Mathematik

Betrachtet aus der Perspektive der Schnittstelle Schule-Hochschule

GILBERT GREEFRATH – HANS-JÜRGEN ELSCHENBROICH – REGINA BRUDER

Der Beitrag befasst sich mit dem Einsatz von digitalen Medien im Abitur im Kontext einer aktuellen Debatte um Grundfertigkeiten an der Schnittstelle zwischen Schule und Universität. Die Verfasser wollen damit zur Diskussion um den Technologie-Einsatz im Abitur beitragen. Wichtige Aspekte sind dabei, ob die Zweiteilung in CAS- bzw. Nicht-CAS-Abituraufgaben noch sinnvoll ist, welche Rolle Anwendungen spielen können und wie mit der Überprüfung rechnerfreier Grundfertigkeiten umgegangen werden soll.

1 Ausgangslage

Zentrale Abiturprüfungen gibt es in einigen Bundesländern schon seit vielen Jahren. In den meisten übrigen Ländern wurden sie im Laufe der letzten Jahre eingeführt. Die möglichen digitalen Hilfsmittel werden in vielen Ländern in die Gruppen wissenschaftliche Taschenrechner (WTR), grafikfähige Taschenrechner (GTR) und Computeralgebrasysteme (CAS) unterschieden. Nicht in allen Ländern sind die gleichen Hilfsmittel zugelassen. Während beispielsweise in Niedersachsen die Verwendung von mindestens grafikfähigen Taschenrechnern vorgeschrieben ist, ist die Verwendung dieser Geräte in Bayern zurzeit nicht gestattet. Sonderregelungen gibt es in einigen Ländern für CAS-Projekte.

Parallel dazu gibt es derzeit Klagen von Hochschulen über mangelnde Mathematik-Kenntnisse und -Fertigkeiten der Abiturienten. Der Einsatz von digitalen Werkzeugen im Mathematikunterricht wird in diesem Zusammenhang als Grund angeführt. Allerdings gab es diese Klagen von Hochschulen auch schon lange vor den GTR und CAS (s. z. B. DMV, 1976).

2 Verwendung von digitalen Werkzeugen in Abiturprüfungen

Die digitalen Werkzeuge werden für die Prüfungen in Gruppen eingeteilt. Einige Länder, z. B. Hessen, unterscheiden WTR, GTR und CAS und erstellen drei unterschiedliche Aufgabengruppen. In Nordrhein-Westfalen dagegen gibt es eine eigene Aufgabengruppe für CAS

 MNU 63/3 (15.4.2010) Seiten 172–176, ISSN 0025-5866, © Verlag Klaus Seeberger, Neuss

und eine weitere Aufgabengruppe für WTR und GTR (= Nicht-CAS) gemeinsam.
Abhängig von den Vorgaben der einzelnen Länder ist die tatsächliche Verwendung von digitalen Werkzeugen in Prüfungen sehr unterschiedlich. Während in Niedersachsen der GTR- oder CAS-Anteil in der Prüfung aufgrund der Vorgaben bei 100 % liegt, ist dieser in Bayern auf wenige Projektschulen beschränkt. Der Einsatz von CAS ist in Prüfungen wenig verbreitet. So lag beispielsweise der entsprechende Anteil der Schulen im Bereich der Bezirksregierung Düsseldorf (NRW) im Jahr 2007 unter 4 %, im Jahr 2009 bei etwa 6 %. In Hessen liegt der CAS-Anteil schätzungsweise bei 6 %.
Die Situation in den einzelnen Bundesländern stellt sich also sehr unterschiedlich dar. Zwei Beispiele aus den Ländern Baden-Württemberg und Nordrhein-Westfalen sollen dies verdeutlichen.

2.1 Das Beispiel Baden-Württemberg

In Baden Württemberg gab es bereits vor der Landesgründung 1952 ein Zentralabitur. Im Mathematikunterricht des Gymnasiums ist die Verwendung eines GTR bereits ab der Sekundarstufe I obligatorisch. Die Aufgaben im Abitur bestehen derzeit aus einem hilfsmittelfreien Pflichtteil und einem Wahlteil. In den Wahlaufgaben ist grundsätzlich ein GTR erlaubt. Die Verwendung des GTR wird ggf. durch die Anweisungen in den Aufgaben eingeschränkt. So wird bei den Anweisungen »exakt bestimmen, exakt berechnen, exakt ermitteln« eine Rechnung ohne Verwendung des GTR und die Angabe eines algebraisch exakten Ergebnisses sowie bei den Begriffen »beweisen, nachweisen, zeigen« eine lückenlose, logische Beweisführung erwartet. Im Gegensatz zu anderen Bundesländern gab es in Baden-Württemberg – abgesehen von den dargestellten Besonderheiten – lange Zeit keinen offiziellen Operatorenkatalog, wenngleich es eine aus der Tradition erwachsene Sprachregelung für die Formulierung von Aufgaben gibt.
Im Rahmen von Projekten ist auch die Verwendung eines CAS im Abitur möglich. Dazu gibt es im Bereich Analysis eigene, zentral gestellte Aufgaben. Diese entstehen durch Modifizierung der GTR-Aufgaben, indem Aufgabenteile, die durch die Bearbeitung mit dem CAS einen Vorteil brächten, verändert werden oder indem die Komplexität des Funktionsterms durch Einführung von Parametern erhöht wird.

2.2 Das Beispiel Nordrhein-Westfalen

In Nordrhein-Westfalen wurden im Jahr 2007 Abiturprüfungen mit zentral gestellten Aufgaben eingeführt, und die Aufgaben werden in Gruppen entwickelt. In der Regel gibt es jeweils themengleiche bzw. kontextgleiche Aufgaben für Grund- und Leistungskurs sowie mit und ohne CAS-Einsatz. Die Lehrenden entscheiden, ob die Aufgaben mit oder ohne CAS gewählt werden. Innerhalb dieser Aufgabengruppen gibt es für die Lehrenden weitere Auswahlmöglichkeiten, die sich durch Alternativen im Lehrplan ergeben. Die Schüler haben keine Auswahlmöglichkeit.
In der Aufgabengruppe ohne CAS dürfen sowohl wissenschaftliche Taschenrechner als auch grafikfähige Taschenrechner (ohne CAS) eingesetzt werden.
Die Aufgaben mit und ohne CAS-Einsatz unterscheiden sich häufig nur in einzelnen Punkten. Insbesondere im Bereich Stochastik sind die Unterschiede zwischen Aufgaben mit und ohne CAS-Einsatz sehr gering bzw. nicht vorhanden. Beispielsweise unterscheiden sich die Aufgaben »Shell-Studie«[1] im Jahr 2009 für den Grundkurs lediglich um einen Teil einer Teilaufgabe.
Um die unterschiedliche Hilfsmittelverwendung in der Nicht-CAS-Gruppe auszugleichen, werden in einigen Aufgabenteilen Funktionsgraphen vorgegeben. Grafikfähige Taschenrechner haben aber häufig noch weitere Funktionalitäten, die weit über die Fähigkeiten wissenschaftlicher Taschenrechner hinausgehen. So können beispielsweise im Bereich der Stochastik mithilfe eines grafikfähigen Taschenrechners mit einer erheblichen Zeitersparnis Werte (z. B. für die Binomialverteilung) bestimmt werden. Daher können Schüler mit grafikfähigem Taschenrechner (Zeit-)Vorteile haben.
Die Zusammenfassung von WTR bis GTR zur Klasse ›Nicht-CAS‹ hat in der Praxis zu einer enormen Verbreitungssteigerung der GTR geführt, aber nicht zu einer spürbar höheren Akzeptanz der CAS-Aufgaben.

2.3 Typische Aufgabe aus dem Bereich Analysis

Eine typische Aufgabenstellung aus dem Bereich *Analysis*[2] zeigt Kasten 1. Die entsprechenden Parallelaufgaben für Grund- und Leistungskurs bzw. mit und ohne CAS unterscheiden sich im Wesentlichen nur durch die Anzahl der Parameter.

	Grundkurs	Leistungskurs
ohne CAS	$f(t) = 8 \cdot t \cdot e^{-0{,}25t}$	$f(t) = a \cdot t \cdot e^{-0{,}25t}$
mit CAS	$f(t) = a \cdot t \cdot e^{-0{,}25t}$	$f(t) = a \cdot t \cdot e^{-bt}$

Bei der näheren Untersuchung kann man einige weitere Unterschiede zwischen Aufgaben, die mit bzw. ohne CAS bearbeitet werden sollen, finden. Die Unterschiede liegen in der geringeren Kleinschrittigkeit der Aufgabenstellungen, der größeren Bedeutung bzw. dem Vorhandensein eines Sachkontextes und der geringeren Anzahl von Standard-Aufgabenteilen in den CAS-Aufgaben. Durch den in CAS-Aufgaben etwas stärker auftretenden Sachkontext wird zusätzlich der Wiedererkennungseffekt für Standard-Aufgabenteile geringer. Der auffälligste Unterschied ist aber die Länge der Aufgabentexte. Die Aufgabenstellungen der CAS-Aufgaben sind in einigen Fällen etwa 60 % länger als die vergleichbaren Aufgaben ohne CAS. Zusätzlich kann es durch den Einsatz unterschiedlicher CAS-Systeme zu unterschiedlichen, technisch bedingten, Lösungsmöglichkeiten bzw. Problemen kommen.

Viele der Unterschiede zwischen CAS- und Nicht-CAS-Aufgaben hängen nicht direkt mit dem Einsatz eines Computeralgebrasystems zusammen. Die Unterschiede in den Aufgabenstellungen entstehen auch durch eine neue Aufgabenkultur und eine stärkere Fokussierung auf prozessbezogene Kompetenzen, die häufig mit dem Einsatz von digitalen Medien im Unterricht verbunden werden. Aufgabenteile, in denen tatsächlich ein CAS benötigt wird und kein GTR ausreicht, sind nur selten in den Abituraufgaben zu finden. War historisch der Unterschied zwischen CAS und wissenschaftlichen Taschenrechnern (z. B. TI 30) sehr groß, so ist er Jahr für Jahr geschrumpft. GTR beherrschen mittlerweile Funktionenplots, numerisches Differenzieren, Integrieren, Lösen von Gleichungen, das symbolische Lösen von quadratischen Gleichungen, Matrizenoperationen usw.

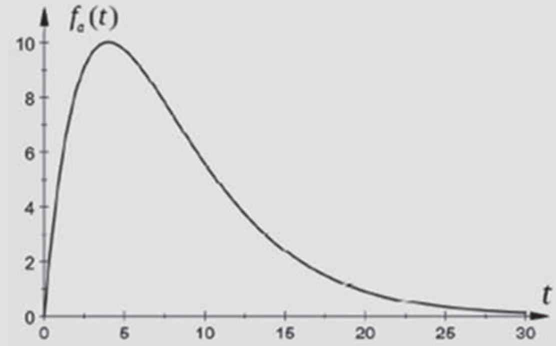
2.4 Realitätsbezüge und Anwendungen

Ernsthafte und umfangreiche Modellierungsaufgaben sind aus verständlichen Gründen in Abituraufgaben bisher in

[1] *http://www.standardsicherung.nrw.de/abitur-gost/fach.php?fach=2* (M GK HT 7 2009)
[2] *http://www.standardsicherung.nrw.de/abitur-gost/fach.php?fach=2* (M GK HT 1 CAS 2008)

Aufgabenstellung:

Ein Pharmaunternehmen produziert ein Antibiotikum in unterschiedlichen Wirkstoffdosierungen, das in Tablettenform verabreicht wird. Der zeitliche Verlauf der Wirkstoffkonzentration im Blut eines Patienten nach Einnahme einer Tablette kann näherungsweise durch die Funktionenschar



$$f_a(t) = a \cdot t \cdot e^{-0.25 \cdot t}, \; t \geq 0, \; a > 0,$$

beschrieben werden. Dabei wird die Zeit t in Stunden seit der Einnahme und die Wirkstoffkonzentration $f_a(t)$ im Blut in Milligramm pro Liter (mg/l) gemessen; die Höhe der Wirkstoffdosierung wird durch den Parameter a berücksichtigt. Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion der Funktionenschar.

Kasten 1. Typische Aufgabe aus dem Bereich Analysis

der Regel nicht anzutreffen. Allerdings kann die Konstruktion von realitätsbezogenen Aufgaben durch die Wahl geeigneter Kontexte und den ernsthafteren Einsatz von GTR oder CAS optimiert werden. Gerade in den Analysis-Aufgaben findet man zur Zeit außermathematische Kontexte mit (zum Teil zu stark) vereinfachenden Modellierungen von Wachstumsprozessen, Wasserzufluss oder Wirkstoffkonzentrationen wie Trassierungen oder die Beschreibung von Dächern mithilfe von Funktionsgleichungen. Diese Problematik zeigt auch das oben beschriebene Beispiel aus der Analysis. Außerdem gibt es für die Nicht-CAS Gruppe innermathematische Kurvendiskussionen ohne Anwendungsbezug. Zudem findet man im Bereich der Analytischen Geometrie[3] häufig unrealistische Einkleidungen von mathematischen Problemen (Kasten 2).

3 Lösungsvorschläge

3.1 Lernen und Leisten

Einerseits können schriftliche Prüfungen nicht direkt den Unterricht bzw. das gesamte Kompetenzspektrum eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts abbilden. Da Aufgaben für eine schriftliche Prüfung in der Regel kleinschrittiger aufgebaut sein müssen als das für Aufgaben für Lernsituationen notwendig wäre, ist es oft schwierig, authentische Anwendungen in Prüfungsaufgaben zu verwenden. Auch experimentelles Arbeiten ist aufgrund der Prüfungssituation häufig nicht möglich. Daher sind Modellierungsaufgaben in Prüfungen kaum durchführbar, und es können z. B. nur Teilschritte des Modellierungskreislaufs in Prüfungsaufgaben aufgenommen werden (s. GREEFRATH, LEUDERS & PALLACK, 2008).

Andererseits darf sich ein guter Unterricht nicht allein an Prüfungsaufgaben orientieren, sondern muss vielfältige Lerngelegenheiten zu einem nachhaltigen Kompetenzerwerb bieten. Auch ist festzustellen, dass prozessbezogene Kompetenzen, die im Unterricht eine wichtige Rolle spielen müssen, in der schriftlichen Prüfung oft so nicht abgeprüft werden können. Es sollte daher auch über individuelle, nicht-zentrale Prüfungsformate nachgedacht werden, die in ihrem Kompetenzspektrum über die schriftlichen Aufgaben des Zentralabiturs hinausgehen.

3.2 Rechnerfreier Prüfungsteil

Sowie man beim sinnvollen Taschenrechnereinsatz in der Sekundarstufe I beispielsweise Kopfrechnen, Schätzen und Überschlagen regelmäßig fordern und fördern sollte, so sollte man auch in der Sekundarstufe II festlegen, welche Fertigkeiten rechnerfrei beherrscht werden sollen. Einige Bundesländer sind konsequenterweise im Abitur dazu übergegangen, in einem rechnerfreien Teil der schriftlichen Prüfung mathematische Grundfertigkeiten abzufragen.

3.3 Prüfungsteil mit digitalen Werkzeugen

Der immer geringer gewordene Unterschied zwischen GTR und CAS rechtfertigt nicht den Aufwand (und die Probleme), die mit zwei Abituraufgabengruppen verbunden sind. Würden alle Schulen bereits auf GTR-Niveau arbeiten, so könnte man CAS als spezielle Grafiktaschenrechner (»GTR+«) einordnen.

Wer im Unterricht mit CAS als Erweiterung von GTR arbeiten will, kann das problemlos tun. Die Abituraufgaben könnten alle auf GTR Niveau erstellt werden, so dass CAS-Klassen weder Vorteile noch Nachteile hätten. Im Unterricht kann unabhängig von der GTR-Verwendung zusätzlich ein CAS (z. B. im Computerraum) eingesetzt werden. Alternativ können auch CAS-Handhelds als erweiterte GTR in Unterricht und Prüfungen verwendet werden.

Wenn GTR als verbindliches Werkzeug (im Sinne von unterer Grenze) festgelegt wird, würden sich viele Probleme auflösen, ohne dass deswegen die Qualität der Aufgaben leiden muss. Gleichzeitig kön-

[3] *http://www.standardsicherung.nrw.de/abitur-gost/fach.php?fach=2* (M LK HT 4 2007)

nen CAS problemlos zum entdeckenden Lernen und experimentellen Arbeiten im Unterricht verwendet werden.
Alle Beteiligten brauchen klare Vorgaben, welche Funktionalitäten der eingesetzten digitalen Werkzeuge verwendet werden dürfen bzw. sollen. Dies könnte in die Richtung gehen, die das Land Niedersachsen bereits beschritten hat (vgl. das Kerncurriculum für die Oberstufe sowie die Ergebnisse des Modellprojektes CALiMERO). Hier wurden für alle relevanten Inhalte die vorausgesetzten Fähigkeiten mit dem Rechner aufgelistet; z. B. für die Stochastik: (1) Zufallszahlen erzeugen, (2) Berechnung von Fakultäten und Binomialkoeffizienten, (3) Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung und der Normalverteilung. Dieser Ansatz ist eine Weiterführung der Ideen von HERGET, HEUGL, KUTZLER & LEHMANN, 2001. Dies lässt sich weiterdenken zu (4) Numerisches Differenzieren und Integrieren, (5) Numerisches Lösen von Gleichungen, (6) Rechnen mit Matrizen usw.

3.4 Realitätsbezüge und Anwendungen

Die Formulierung von realitätsbezogenen Aufgaben orientiert sich häufig an typischen eingekleideten Aufgaben oder aus Schulbüchern bekannten Sachkontexten. Diese Aufgaben erscheinen auf den ersten Blick oft schwer lösbar, wenn man den Realitätsbezug des Kontextes ernst nimmt. Erkennt man dagegen die Einkleidung und nimmt den Kontext nicht ernst, ist die Bearbeitung einer solchen Aufgabe häufig deutlich einfacher, da dann die Aufgabe als Standardaufgabe erkennbar wird. Hier sollte durch geeignete Aufgabenstellungen eine solche Benachteiligung ausgeschlossen werden.
Anwendungssituationen sollen in Prüfungsaufgaben so vorkommen, dass sie einen authentischen Mathematikgebrauch darstellen oder Vorteile bei der Problemerschließung bieten. Wenn man vermeiden will, dass nur bloße Einkleidungen statt echter Anwendungen verwendet werden, führt dies in der Praxis zu einer stärkeren Trennung von Kalkül und Modellierung in Prüfungsaufgaben (GREEFRATH, LEUDERS & PALLACK, 2008). Allenfalls Teilhandlungen des Modellierungskreislaufs können in Prüfungen thematisiert werden. Dies sollte jedoch im Unterricht durch die Bearbeitung von komplexeren Modellierungsaufgaben vorbereitet werden.

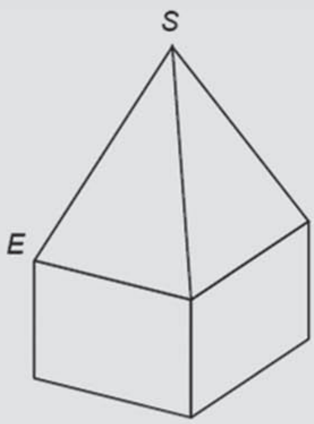
Speziell können Analysis-Aufgaben als echte realitätsbezogene Aufgaben gestaltet werden. Hier sollten vielfältige Sachkontexte entwickelt werden, die eine realistische und authentische Problemstellung beinhalten. In diesem Bereich sind die stärksten Veränderungen durch die Einführung von GTR oder CAS zu erwarten. Dies bedeutet aber nicht, dass innermathematische Aufgabenstellungen nicht mehr formuliert werden sollten! Insbesondere im Bereich Analytische Geometrie sind anwendungsbezogene Aufgaben in vielen Fällen nicht authentisch. Eine größere Anzahl sinnvoller und machbarer Sachkontexte ist für die in der Schule behandelten Inhalte der Analytischen Geometrie nur schwer zu finden. Eine mögliche Abhilfe für fehlende authentische Mathematikaufgaben in diesem Bereich ist die Verwendung von innermathematischen Problemen. Dies erscheint sinnvoller zur Entwicklung eines angemessenen Mathematikbildes als die Verwendung von eingekleideten Textaufgaben.
Durch die Verlagerung von Kalkül zu GTR oder CAS wird mehr Raum für Beschreibungen und Begründungen in Prüfungsaufgaben geschaffen. Auch dies muss im Unterricht (und in der Lehrerfortbildung) vorbereitet werden!

3.5 Forschungsfragen

Parallel zu den beschriebenen Lösungsansätzen an der Schnittstelle Schule-Hochschule wird vielfältiger Forschungsbedarf deutlich. Dieser kann exemplarisch mit folgenden Forschungsfragen beschrieben werden:

- Wie lässt sich eine Auswahl und Abgrenzung hilfsmittelfreier Lernanteile in den einzelnen Stoffgebieten für den Unterricht und für die schriftliche Prüfung begründen?
- Welche Wirkungen auf den Unterricht und für die Verfügbarkeit von Grundfertigkeiten in weiterführenden Bildungseinrichtungen hat die Aufnahme hilfsmittelfreier Pflichtteile in die schriftliche Prüfung?
- Welche langfristigen Auswirkungen eines definierten, konzeptbasierten Technologie-Einsatzes im Mathematikunterricht zeigen sich für die Tragfähigkeit mathematischer Begriffsbildungen und für das Verständnis mathematischer Zusammenhänge?

Ein Turm besteht aus einem quaderförmigen Grundbau mit einem Spitzdach in Form einer geraden, quadratischen Pyramide (siehe rechts). Auf Seite 2 finden Sie ein Schrägbild des Turmes.
Der Turm erzeugt auf dem (horizontalen) Boden einen Schatten.



a) Zu einem bestimmten Zeitpunkt fallen die Sonnenstrahlen parallel zum Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein.

Berechnen Sie die Endpunkte und die Länge des Schattens, den die Dachkante $\overline{SE}$ mit $S(3\,|\,3\,|\,12)$ und $E(6\,|\,0\,|\,4)$ in der x_1-x_2-Ebene erzeugt. (9 Punkte)

Kasten 2. Typische Aufgabe aus dem Bereich Analytische Geometrie.

- Welche Aufgabenformate und Gestaltungselemente sind geeignet, solche Prüfungsaufgaben zu konstruieren, die mehr auf mathematisches Verständnis abzielen und die auch zwischen Werkzeugkompetenz und mathematischer Sachkompetenz unterscheiden können?
- Welche Innovationen können die Entwicklung einer geeigneten Prüfungskultur mit Technologieeinsatz befördern und welche Aktivitäten verschiedener Akteure sind hilfreich zur Weiterentwicklung der Unterrichtskultur jenseits von »teaching to the test«?
- Welche Qualitätskriterien sollen Aufgaben für schriftliche Prüfungen mit Technologieeinsatz erfüllen?

Literatur

BRUDER, R., INGELMANN, M. (2009). CAliMERO – aus Sicht der Forschenden. *MNU, 55, 13–19*.

DMV (Deutsche Mathematiker Vereinigung e. V.) (1976): Denkschrift zum Mathematikunterricht an Gymnasien. *https://www.dmv.mathematik.de/component/docman/doc_download/22-dmverklaerung1976.html* (28.01.10)

ELSCHENBROICH, H.-J. (2009). Expertentagung zu »Mathematikunterricht und MINT-Studienfächern«. *MNU, 62, 507*.

GREEFRATH, G.; LEUDERS, T. & PALLACK, A. (2008). Gute Abituraufgaben – (ob) mit oder ohne Neue Medien. *MNU, 61, 79–83*.

HERGET, W., HEUGL, H., KUTZLER, B. & LEHMANN, E. (2001). Welche handwerklichen Rechenkompetenzen sind im CAS-Zeitalter unverzichtbar? *MNU, 54, 458–464*.

SCHEU, G. (2006). Einsatzmöglichkeiten von Kleinrechnern mit Computeralgebrasystemen (mit einem kurzen Überblick über die Entwicklung in Baden-Württemberg). Computeralgebra in Lehre, Ausbildung und Weiterbildung V – Entdecken, üben, prüfen mit Computeralgebra, neue Entwicklungen an Schule und Hochschule. Tagungsband. Fachgruppe Computeralgebra der DMV, GAMM und GI. 105–108.

Prof. Dr. GILBERT GREEFRATH,
g.greefrath@uni-koeln.de,
Universität zu Köln,
Seminar für Mathematik und ihre Didaktik,
Gronewaldstr. 2, 50931 Köln.

StD HANS-JÜRGEN, ELSCHENBROICH,
elschenbroich@medienberatung.nrw.de,
Medienberatung NRW,
Bertha von Suttner Platz 1, 40227 Düsseldorf.

Prof. Dr. REGINA BRUDER,
bruder@mathematik.tu-darmstadt.de,
TU Darmstadt, FB Mathematik,
Schlossgartenstr. 7, 64289 Darmstadt.

MNU 63/3 (15.4.2010) Seiten 176–182, ISSN 0025-5866, © Verlag Klaus Seeberger, Neuss